

## TROSTRUKI INTEGRALI

### 1. DIREKTNO RAČUNANJE

Ako je funkcija  $f(x,y,z)$  neprekidna u oblasti  $V$  koja je određena sa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{array} \right. \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

### 2. CILINDRIČNE KOORDINATE

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right. \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dr d\varphi dz$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r r dr \int_{z_1}^{z_2} f dz$$

$$|J| = r$$

### 3. SFERNE KOORDINATE

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \\ |J| = r^2 \sin \theta \end{array} \right. \quad \text{Oдавde je } x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Uglove  $\varphi$  i  $\theta$  određujemo iz zadatka i vodimo računa da je najčešće :

$$r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$$

**Možemo koristiti( u zavisnosti od situacije) i modifikovane sferne koordinate:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = ar \cos \varphi \sin \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \end{array} \right.$$

$$z = cr \cos \theta$$

$$|J| = abc r^2 \sin \theta$$

**A u situaciji kad je zadata površ baš “zeznuta” možemo koristiti i sledeće smene:**

$$\begin{cases} x = ar \cos^\beta \varphi \sin^\alpha \theta \\ y = br \sin^\beta \varphi \sin^\alpha \theta \\ z = cr \cos^\alpha \theta \end{cases}$$

Jakobijan u ovoj situaciji računamo:

$$|J| = abc r^2 \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi$$

Osnovna perioda je  $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$

**PRIMENA TROSTRUKOG INTEGRALA ZA RAČUNANJE ZAPREMINE:**

$$V = \iiint_V dx dy dz \quad \text{po oblasti } V$$