

SVODJENJE NA KANONSKI OBLIK (KRIVE DRUGOG REDA)

- POSTUPAK -

Opšta jednačina drugog stepena po x i y je jednačina oblika :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

pri čemu za koeficijente A, B, C, D, E, F iz skupa R važi da je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Kako krivu zadatu u ovom obliku svesti na kanonski oblik?

Moramo vršiti transformacije koordinatnog sistema : TRANSLACIJU I ROTACIJU .

Prvo uvek proverimo da li zadata kriva ima centar !

Naravno , najpre nadujemo vrednosti za koeficijente A, B, C, D, E, F

Ako je $D = E = 0$ zaključujemo odmah da kriva ima centar u $O(0,0)$ t.j. u koordinatnom početku.

Rešavamo sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + Cb + E = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje ako je } AC - B^2 \neq 0 \\ \text{Tada nadujemo centar } O'(a,b). \end{array}$$

Ako kriva ima centar $O'(a,b)$ onda **vršimo translaciju** :

$$\left. \begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zamenimo } x \text{ i } y \text{ u datu jednačinu i ako smo dobro radili "nestaće" članovi uz } x \text{ i } y. \\ \text{Znači ostaje oblik } A_1x'^2 + 2B_1x'y' + C_1y'^2 + F_1 = 0 \end{array}$$

Dalje **vršimo rotaciju** sistema $x'O'y'$ za ugao α , gde je $0 < \alpha < \pi$. Koristimo:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} \text{ pa kad odavde nadujemo ugao } \alpha \text{ , idemo u formule rotacije:}$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha \\ y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} x' \text{ i } y' \text{ zamenimo , ako smo dobro radili ovo nas 'oslobadja' od člana sa } x' \text{ i } y'. \\ \text{Znači ostaje oblik } A_2x''^2 + C_2y''^2 + F_2 = 0 \end{array}$$

A odavde, iz oblika $A_2x^2 + C_2y^2 + F_2 = 0$ zaključujemo o kojoj krivi je reč!

PAZI:

Ako se desi da sistem $Aa + Bb + D = 0$, $Ba + Cb + E = 0$ nema rešenje, odnosno ako data kriva nema centar onda prvo vršimo rotaciju!

Šta sve može biti naše rešenje?

- kružna linija $(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0$ gde su (p,q) koordinate centra
- elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a je velika poluosa, b je mala poluosa (može i obrnuto)
- hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a je realna poluosa, b je imaginarna poluosa
- parabola $y^2 = 2px$ ili $x^2 = 2py$
- par pravih sa jednom zajedničkom tačkom
- dve paralelne prave
- tačka
- prazan skup tačaka

Kako da znamo koja je kriva u pitanju? Posmatramo $A_2x^2 + C_2y^2 + F_2 = 0$

i) Ako je $A_2C_2 = AC - B^2 > 0$, to jest ako su A_2 i C_2 istog znaka, kriva je **ELIPTIČKOG** tipa i to :

- **elipsa** ako je F_2 suprotnog znaka od A_2
- **tačka**, ako je $F_2 = 0$

- **prazan skup** tačaka (imaginarna elipsa) ako je F_2 istog znaka kao A_2
- **kružna linija**, ako je $A_2 = C_2$ i F_2 različitog znaka od A_2

ii) Ako je $A_2C_2 = AC - B^2 < 0$ to jest A_2 i C_2 su različitog znaka kriva je **HIPERBOLIČKOG** tipa i to:

- **hiperbola** za $F_2 \neq 0$ i još važi: Ako su F_2 i A_2 suprotnog znaka $O'x''$ je realna osa, a ako su F_2 i A_2 istog znaka realna osa je $O'y''$
- **par pravih koje se seku** u tački O' ako je $F_2 = 0$

iii) Krive **PARABOLIČKOG** tipa

Šta se dešava u slučaju kada je $AC - B^2 = 0$, to jest kada sistem $Aa + Bb + D = 0$, $Ba + Cb + E = 0$ **nema jedinstveno rešenje?**

Već smo pomenuli da tada prvo vršimo rotaciju!

Dobijemo jednačinu: $A_1x'^2 + C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0$

Desiće nam se jedna od sledeće dve situacije: $A_1 = 0$ ili $C_1 = 0$

1) **$A_1 = 0$** , i tada jednačina postaje $C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0$, ovde izvršimo dopunu do punog kvadrata po y' i izvršimo translaciju koja nam daje **parabolu!** Za one koji ne vole mnogo da mozgaju evo gotove formule

te translacije: $x'' = x' + \frac{F_1}{2D_1} - \frac{F_1^2}{2C_1D_1}$ i $y'' = y' + \frac{E_1}{C_1}$

Ako je i $D_1 = 0$ onda jednačina postaje kvadratna po y' $C_1y'^2 + 2E_1y' + F_1 = 0$, probamo da je rešimo i ako ima realna rešenja, onda ta rešenja predstavljaju **dve paralelne prave**; ako su rešenja ista, onda se te dve prave **poklapaju**; i ako nema rešenja u pitanju je **imaginarna kriva**.

2) **Ako je $C_1 = 0$** onda imamo $A_1x'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0$, slično kao malopre vršimo dopunu do punog kvadrata, samo sad po x' , itd.....

Dobijamo parabolu, dve paralelne prave ili imaginarnu krivu.

Šta najčešće pravi problem?

Kad radimo rotaciju i koristimo formulu $ctg 2\alpha = \frac{A-C}{2B}$ može se desiti da vrednost $\frac{A-C}{2B}$ ne bude "lep" broj.

Lepi su brojevi $0, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm 1, \pm \sqrt{3}, \pm \infty$ jer za njih znamo o kom uglu se radi!

Ako nam padne neki drugi broj, onda moramo koristiti trigonometrijske formule:

$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2 \alpha - 1}{2ctg \alpha}$ pa odavde oformimo kvadratnu jednačinu po $ctg \alpha$ **i nađemo $ctg \alpha$**

Dalje znamo da je $ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ i $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Odavde nađemo vrednosti za $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ i to menjamo u formule rotacije:

$$x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$$

$$y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha$$

Najbolje je da pogledate nekoliko uradjenih primera iz sledećeg fajla, pa onda probajte sami!

www.matematiranje.com