

## POVRŠINSKI INTEGRALI

### Površinski integral prve vrste

i) Ako je  $S$  deo po deo glatka dvostrana površ zadata jednačinama:

$$x=x(u,v)$$

$$y=y(u,v)$$

$$z=z(u,v)$$

gde  $(u,v)$  pripada  $D$  a funkcija  $f(x,y,z)$  je definisana i neprekidna na površi  $S$ , onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\sqrt{EG - F^2} dudv$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Ako jednačina površi  $S$  ima oblik  $z=z(x,y)$ , gde je  $z=z(x,y)$  jednoznačna neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2} dx dy \quad \text{i}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

## POVRŠINSKI INTEGRAL PRVE VRSTE NE ZAVISI OD ORIJENTACIJE KRIVE

### Površinski integral druge vrste

Ako je S glatka dvostrana površ na kojoj je izabrana jedna od dveju strana, određena smerom normale

$\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  i  $z = z(x,y)$  tada je :

$$\cos \alpha = \frac{p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \text{gde je: } p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\cos \gamma = \frac{-1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

### VAŽNO

( Da li ćemo uzeti + ili – zavisi od ugla koji normala gradi sa pozitivnim delom z-ose:

Ako je taj ugao oštar, onda mora biti  $\cos \gamma > 0$  pa uzimamo minus ispred korena,  $\cos \gamma = \frac{-1}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$

Ako je taj ugao tup, onda je  $\cos \gamma < 0$ , pa uzimamo + ispred korena  $\cos \gamma = \frac{-1}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$  )

a  $P=P(x,y,z)$   $Q=Q(x,y,z)$  i  $R=R(x,y,z)$  tri funkcije, definisane i neprekidne na površi S, onda je

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

Površinski integral druge vrste **zavisi** od orijentacije krive.

Prelaskom na drugu stranu površi menja se znak.

### STOKSOVA FORMULA

Ako su  $P, Q, R$  neprekidne diferencijabilne funkcije a  $L$  zatvorena , deo po deo glatka kriva koja je granica deo po deo dvostrane površi  $S$ , tada je:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

pri čemu su  $\cos \alpha$  ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  koordinate normale površi  $S$  koja je orijentisana na onu stranu u odnosu na koju se obilazak krive  $L$  vrši u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu.

### FORMULA OSTROGRADSKOG

Ako je  $S$  deo po deo glatka površ , koja ograničava oblast  $V$  , a  $P, Q$  i  $R$  neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti  $V \cup S$ , onda važi formula:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

gde su  $\cos \alpha$  ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  kosinusi pravca spoljašnje normale površi  $S$ .

**Primena:**

**i) Fluks vektorskog polja**

Za vektorsko polje  $\vec{A} = P(x, y, z) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)$

$$\phi = \iiint P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\text{div } \vec{A} = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

**ii) Cirkulacija vektorskog polja**

$$C = \oint P dx + Q dy + R dz = \iint \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \vec{n} ds \quad \vec{n} = \frac{\text{gradu}}{\pm(\text{gradu})}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

ako je  $\text{rot } A = 0$  i  $\text{div } A \neq 0$  polje je onda potencijalno.

**iii) Potencijal polja A**

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz$$