PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

1. Odrediti Košijevo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine :

$$y^2 p + yzq + z^2 = 0$$

koje zadovoljava uslov : x – y = 0 i x – yz = 1

Rešenje:

$y^2 p + yzq + z^2 = 0$ Najpre moramo z^2 da prebacimo na drugu stranu!

$y^2 p + yzq = -z^2$ Sada pravimo sistem d.j. u simetričnom obliku

$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2}$ Uočimo drugi i treći član ove jednakosti.

$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2}$ Pomnožimo sve sa z

$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z}$ Sada integralimo

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dz}{z}$ odavde je $\ln|y| = -\ln|z| + \ln|c_1|$, odnosno $y = \frac{c_1}{z}$ i odatle $c_1 = yz$

Dakle , prvi prvi integral je $\psi_1 = yz$

Nađimo sada drugi prvi integral:

Izrazimo iz $c_1 = yz$ da je $z = \frac{c_1}{y}$ i uzmimo sada iz jednakosti $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2}$, prva dva člana:

$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{yz}$ ovde ćemo najpre sve pomnožiti sa y a zatim zameniti z sa $z = \frac{c_1}{y}$,

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z}$ pa će biti $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{\frac{c_1}{y}}$ pa je $c_1 dx = y^2 dy$, ovo sada integralimo:

$c_1 x = \frac{y^3}{3} + c_2$ Vratimo da je $c_1 = yz$

$yzx = \frac{y^3}{3} + c_2$ I odavde izrazimo konstantu $c_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$

Dobili smo i drugi prvi integral: $\psi_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$

Rešenja su : $\psi_1 = yz$ **i** $\psi_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$

Da li su rešenja dobra?

Moramo ispitati njihovu nezavisnost! Odnosno mora da važi:

$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x,y)} \neq 0$ to jest $\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 0 & yz \\ z & zx - y^2 \end{vmatrix} \neq 0$ **jeste!**

Rešenja su dobra, idemo dalje.....

Dalje rešavamo Košijev zadatak **x – y = 0 i x – yz = 1**

Šta ovde treba uraditi?

Naš poso je da koristeći rešenja $\psi_1 = yz$ **i** $\psi_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$ i uslove **x – y = 0 i x – yz = 1, eliminišemo nepoznate i nađemo vezu između rešenja.**

Kako je **x – yz = 1** i $\psi_1 = yz$ to je $x - \overline{\psi_1} = 1$ pa je $x = \overline{\psi_1} + 1$

Kako je **x – y = 0** to je x = y = $\overline{\psi_1} + 1$

$\psi_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$ pa je odavde $\overline{\psi_2} = \overline{\psi_1}(1 + \overline{\psi_1}) - \frac{(1 + \overline{\psi_1})^3}{3}$

Dakle našli smo vezu između rešenja i eliminisali nepoznate x,y i z

Ovo malo prisredimo i vratimo prave vrednosti $\psi_1 = yz$, $\psi_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$

$\overline{\psi_2} = \overline{\psi_1}(1+\overline{\psi_1}) - \frac{(1+\overline{\psi_1})^3}{3}$ sve pomnožimo sa 3

$3\overline{\psi_2} = 3\overline{\psi_1}(1+\overline{\psi_1}) - (1+\overline{\psi_1})^3$ ovde menjamo $\psi_1 = yz$, $\psi_2 = yzx - \frac{y^3}{3}$ umesto $\overline{\psi_1}$ i $\overline{\psi_2}$

$3(xyz - \frac{y^3}{3}) = 3yz(1+yz) - (1+yz)^3$ **malo prisredimo …**

$\boxed{3xyz - y^3 + 1 + y^3 z^3 = 0 \quad \textbf{i evo konačnog rešenja}}$

2. Odrediti Košijevo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine :

$$yp + xq = x^2 + y^2$$

koje zadovoljava uslov : x = 1 i z = 1 + 2y +3 y^2

Rešenje:

$yp + xq = x^2 + y^2$ pređimo u simetrični sistem

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$ Odavde izaberemo prva dva člana jednakosti

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ odavde je xdx = ydy Integralimo

$\int xdx = \int ydy$ Pa je $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1{}^*$ (ovde kao mali trik uzimamo $c_1{}^*$) Sve pomnožimo sa 2

$x^2 = y^2 + 2\, c_1{}^*$ obeležimo sada $2\, c_1{}^*$ sa c_1 onda je $x^2 = y^2 + c_1$ to jest

prvi prvi integral je $c_1 = x^2 - y^2$ **odnosno** $\psi_1 = x^2 - y^2$

Nađimo sada drugi prvi integral:

Pođimo od početne jednakosti

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$ Dodajmo prvom članu jednakosti i gore i dole y , a drugom članu jednakosti i gore i dole x

$\frac{ydx}{y^2} = \frac{xdy}{x^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$ Saberimo sada prva dva člana jednakosti

$\frac{ydx + xdy}{y^2 + x^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$ pa je $\frac{d(xy)}{y^2 + x^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$ skratimo imenioce d(xy)=dz , ovo integralimo i dobijamo

$xy = z + c_2$ pa je **drugi prvi integral** $\psi_2 = xy - z$

Dakle: $\psi_1 = x^2 - y^2$ $\psi_2 = xy - z$ su prvi integrali, proverimo njihovu nezavisnost

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2x & y \\ -2y & x \end{vmatrix} \neq 0$$ **znači da su rešenja dobra!**

Dalje rešavamo Košijev zadatak **x = 1 i z = 1 + 2y +3 y^2**

Najpre u oba rešenja zamenimo x = 1:

$\overline{\psi_1} = 1 - y^2$ **i** $\overline{\psi_2} = y - z$ **odavde je** $1 - \overline{\psi_1} = y^2$ **to jest** $y = \sqrt{1 - \overline{\psi_1}}$ **i** $y - \overline{\psi_2} = z$

Dalje ovo menjamo u

z = 1 + 2y +3 y^2

$y - \overline{\psi_2}$ **= 1 + 2y + 3** $(1 - \overline{\psi_1})$ **malo prisredimo...**

3$\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}$ **- 4 = y**

3$\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}$ **- 4 =** $\sqrt{1 - \overline{\psi_1}}$ **ovde sada menjamo rešenja** $\psi_1 = x^2 - y^2$ $\psi_2 = xy - z$ umesto $\overline{\psi_1}$ i $\overline{\psi_2}$

$3(x^2 - y^2) - (xy - z) - 4 = \sqrt{1 - (x^2 - y^2)}$ opet malo prisredimo i :

konačno rešenje je $z = 4 - 3x^2 + 3y^2 + xy + \sqrt{1 - (x^2 - y^2)}$

3. **Odrediti opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine :**

$$\mathbf{xp + yq = z - xy}$$

Rešenje:

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}$ uzimamo prva dva člana jednakosti

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ integralimo

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$ pa je odavde $\ln|x| = \ln|y| + \ln|c_1|$ odnosno $x = y\, c_1$, a odavde je $c_1 = \frac{x}{y}$, tako da je

prvi prvi integral $\psi_1 = \frac{x}{y}$

Izrazimo iz $x = y\, c_1$ da je $y = \frac{x}{c_1}$ i iz početne jednakosti $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}$ ćemo uzeti prvi i treći član.

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - xy}$ ovde zamenimo da je $y = \frac{x}{c_1}$, i dobijamo

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - x\frac{x}{c_1}}$ pa je $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - \frac{x^2}{c_1}}$ sredimo malo.....

$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - \frac{x}{c_1}$ to jest $z` = \frac{z}{x} - \frac{x}{c_1}$ , odnosno $z` - \frac{z}{x} = -\frac{x}{c_1}$ a ovo je linearna d.j. po z

$$z` - \frac{z}{x} = -\frac{x}{c_1}$$

$$z(x) = e^{-\int p(x)dx}(c_2 + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx)$$

$$\int p(x)dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| = \ln|x|^{-1}$$

$$\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = -\int \frac{x}{c_1} e^{\ln x^{-1}} dx = -\int \frac{1}{c_1} dx = -\frac{x}{c_1}$$

$z(x) = x(c_2 - \frac{x}{c_1})$ vratimo ovde da je $c_1 = \frac{x}{y}$ pa je

$z = x(c_2 - y)$ i odavde izrazimo konstantu $c_2 = y + \frac{z}{x}$, pa je dakle:

drugi prvi integral $\psi_2 = y + \frac{z}{x}$

Proverimo nezavisnost rešenja:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-z}{x^2} \\ \frac{-x}{y^2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{Očigledno važi!}$$

Dakle:

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{prvi prvi integral} \quad \psi_1 = \frac{x}{y} \\ \textbf{drugi prvi integral} \quad \psi_2 = y + \frac{z}{x} \end{array}}$$

Važno : Kad nađemo prve integrale opšte rešenje se može zapisati u obliku F(ψ_1,ψ_2)=0

Dakle, u našem slučaju bi bilo $\boxed{F\left(\frac{x}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0}$

Još važi da ako z ulazi samo u jedan od prvih integrala, opšte rešenje se može zapisati u obliku:

$\psi_1 = \mathbf{f}(\psi_2)$ **ako se z javlja u** ψ_1 i

$\psi_2 = \mathbf{f}(\psi_1)$ **ako se z javlja u** ψ_2

U našem slučaju z se javlja u ψ_2 **pa bi rešenje mogli zapisati kao:**

$y + \frac{z}{x} = \mathbf{f}\left(\frac{x}{y}\right)$ i odavde možemo izraziti z po potrebi

$\frac{z}{x} = \mathbf{f}\left(\frac{x}{y}\right) - y$ i kad sve pomnožimo sa x

$$\boxed{z = x\,\mathbf{f}\left(\frac{x}{y}\right) - xy}$$

4. Naći onu integralnu površ parcijalne diferencijalne jednačine :

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+zx\frac{\partial z}{\partial y}+2xy=0$$

koja prolazi kroz kružnicu $x^2 + y^2 = 16$ za $z = 3$

Rešenje:

$yz\frac{\partial z}{\partial x}+zx\frac{\partial z}{\partial y}+2xy=0$ Pazi, znamo da je $\frac{\partial z}{\partial x}=p\wedge\frac{\partial z}{\partial y}=q$

$yzp+zxq=-2xy$ prelazimo u sistem

$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{-2xy}$ iydvojimo prva dva člana jednakosti

$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}$ sve pomnožimo sa z

$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$ odavde je $\int xdx=\int ydy$ pa je kao malopre $\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+c_1*$ odnosno $\mathbf{x^2 = y^2 + c_1}$ gde je $\mathbf{c_1 = 2c_1*}$

$c_1=x^2-y^2$ **odnosno** $\psi_1=x^2-y^2$ **je prvi prvi integral**

Vratimo se sada u početni sistem

$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{-2xy}$ proširimo prvi član jednakosti sa x, a drugi sa y

$\frac{xdx}{xyz}=\frac{ydy}{yzx}=\frac{dz}{-2xy}$ saberimo sada prva dve člana jednakosti

$\frac{xdx+ydy}{2xyz}=\frac{dz}{-2xy}$ pomnožimo sve sa 2xy

$\frac{xdx+ydy}{z}=\frac{dz}{-1}$ pomnožimo sa z i dobijamo

$xdx + ydy = -z\, dz$ integralimo

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=-\frac{z^2}{2}+c_2^*$ pomnožimo sada sve sa 2

$x^2 + y^2 = - z^2 + 2 c_2*$ sada ćemo obeležiti $2 c_2* = c_2$

$x^2 + y^2 = - z^2 + c_2$ odavde je $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ odnosno:

$\psi_2 = \mathbf{x^2 + y^2 + z^2}$ **je drugi prvi integral**

$\psi_1 = x^2 - y^2$ **je prvi prvi integral**

Proverimo nezavisnost: $\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8xy \neq 0$

Da nađemo integralnu krivu koja prolazi kroz **kružnicu $\mathbf{x^2 + y^2 = 16}$ za $\mathbf{z = 3}$**

Zamenimo ove vrednosti u $\psi_2 = \mathbf{x^2 + y^2 + z^2}$ **pa je** $\overline{\psi_2} = 16 + 3^2 = 16 + 9 = 25$**, zaključujemo:**

$\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = 25}}$ **je tražena integralna kriva, a ovo je sfera (centralna) sa poluprečnikom r = 5**

5. Nađi opšte rešenje parcijalne jednačine :

$$(2z - 3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - 2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Rešenje:

Najpre pređimo u sistem:

$\frac{dx}{2z - 3y} = \frac{dy}{3x - z} = \frac{dz}{y - 2x}$ pomnožimo sa 2 drugi član jednakosti

$\frac{dx}{2z - 3y} = \frac{2dy}{6x - 2z} = \frac{dz}{y - 2x}$ saberimo sada prva dva člana jednakosti(2z se pokrati)

$\frac{dx + 2dy}{6x - 3y} = \frac{dz}{y - 2x}$ malo prisredimo...

$\frac{dx + 2dy}{3(2x - y)} = \frac{-dz}{2x - y}$ sve pomnožimo sa 3(2x-y)

$dx + 2dy = -3\,dz$ integralimo

$x + 2y = -3z + c_1$ pa je $c_1 = x + 2y + 3z$ odnosno

$\psi_1 = x + 2y + 3z$ **je prvi prvi integral**

Vratimo se na početni sistem:

$$\frac{dx}{2z-3y}=\frac{dy}{3x-z}=\frac{dz}{y-2x}$$ proširimo redom prvi, drugi i treći član jednakosti sa x, y, z

$$\frac{xdx}{2xz-3xy}=\frac{ydy}{3xy-yz}=\frac{zdz}{yz-2xz}$$ saberimo prva dva člana jednakosti (3xy se potire)

$$\frac{xdx+ydy}{2xz-yz}=\frac{zdz}{yz-2xz}$$ okrenimo imenilac kod drugog člana jednakosti i taj minus ubacimo kod brojioca

$$\frac{xdx+ydy}{2xz-yz}=\frac{-zdz}{2xz-yz}$$ naravno, sada je kad pomnožimo sve sa imeniocem

$xdx + ydy = - zdz$ ovo integralimo

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=-\frac{z^2}{2}+c_2^*$$ pomnožimo sve sa 2

$x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ gde je $c_2 = 2c_2^*$

$\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2$ **je drugi prvi integral**

Konačno rečenje je u = f($x+2y+3z$ **,** $x^2 + y^2 + z^2$)

Gde je f proizvoljna integrabilna funkcija.