

MATRICE ZADACI (IDEO)

1. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$. Izračunati:

a) $A + B = ?$

b) $A - B = ?$

v) $2A - 3B = ?$

g) $A^T + B^T = ?$

Rešenje:

a)

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+0 & 1+(-3) \\ -2+2 & 16+6 & 0+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 22 & -8 \end{bmatrix}$$

b)

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-0 & 1-(-3) \\ -2-2 & 16-6 & 0-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

v)

$$2A - 3B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 16 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -4 & 32 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 6 & 18 & -24 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 4-3 & 6-0 & 2-(-9) \\ -4-6 & 32-18 & 0-(-24) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ -10 & 14 & 24 \end{bmatrix}$$

g)

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & -2+2 \\ 3+0 & 16+6 \\ 1+(-3) & 0+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 22 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

2. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunati:

a) $2A - B = ?$

b) $(A^T + B)^T = ?$

Rešenje:

a)

$$2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -4 & -8 & 2 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 \\ -1 & -12 & 1 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

b)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A^T + B)^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Ako su nam date matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, izračunati:

a) $A \cdot B = ?$

b) $B \cdot A = ?$

Rešenje:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 8 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 8 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 8 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

I na ovom primeru uočavamo jednu bitnu činjenicu koju smo napomenuli u teoretskom delu MATRICE:

a to je da komutativni zakon za množenje matrica NE VAŽI.

4. Ako su date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

a) $A \cdot B = ?$

b) $B \cdot A = ?$

Rešenje:

a)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4-8+2 & 1+4+4 & 1+0+2 \\ 8-4+2 & 2+2+4 & 2+0+2 \\ 4-8+3 & 1+4+6 & 1+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ -4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & -4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & -4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2+1 & 8+1+2 & 8+2+3 \\ -4+4+0 & -8+2+0 & -8+4+0 \\ 1+4+1 & 2+2+2 & 2+4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 13 \\ 0 & -6 & -4 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Još jednom vidimo da je $A \cdot B \neq B \cdot A$

5. Ako su date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ izračunati:

a) $A \cdot C + B = ?$

b) $B \cdot C^T = ?$

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned}
 A \cdot C + B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 11 \cdot 6 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 11 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 6 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 + 5 + 66 & 2 + 1 + 11 \\ 4 + 15 + 0 & 2 + 3 + 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 75 & 14 \\ 19 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 & 15 \\ 20 & 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 C^T &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 B \cdot C^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+1 & 5+1 & 6+1 \\ 2+1 & 5+1 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6. Za dati polinom $P(x) = x^2 + 2$ i matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ izračunati $P(A)$.

Rešenje:

Kako je $P(A) = A^2 + 2$, najdimo najpre matricu A^2 :

$$\begin{aligned}
 A^2 = A \cdot A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9+0+2 & 0+0-2 & 6+0+0 \\ 6+2+4 & 0+1-4 & 4+4+0 \\ 3-2+0 & 0-1+0 & 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sad ovo menjamo u $P(A) = A^2 + 2 \cdot I$, ali pazimo da uz 2 obavezno dodamo jediničnu matricu I , naravno trećeg reda.

Dakle $P(A) = A^2 + 2 \cdot I$

$$P(A) = A^2 + 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 6 \\ 12 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Za dati polinom $P(x) = x^2 - 5x + 3$ i matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ odredi $P(A)$.

Rešenje:

$$P(A) = A^2 - 5A + 3 \cdot I$$

Naći ćemo na stranu svaki od sabiraka pa to ubaciti u $P(A) = A^2 - 5A + 3 \cdot I$. Možemo i direktno sve da radimo ali se ukomplikuje ...

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 15 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot I = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 15 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow P(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Dalje ćemo pokušati da vam objasnimo kako se traži matrica A^n ako je data matrica A .

Ovakav tip zadatka možemo rešavati na više načina:

i Tražimo matrice A^2, A^3, A^4 i ako treba još par njih dok ne zaključimo po kojoj se zakonitosti pojavljuju elementi matrice... Zatim zapišemo kako bi trebalo da izgleda A^n i izvršimo dokaz matematičkom indukcijom.

ii Drugi način je da koristimo binomnu formulu $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$.

Datu matricu napišemo kao zbir dve matrice, od kojih je jedna jedinična matrica a druga kada se traži njen stepen, postaje nula matrica već kod trećeg ili četvrtog stepena.

iii Treći način je da upotrebljavamo sopstvene vrednosti i vektore a to je objašnjeno u fajlu matrice zadaci 2. deo.

8. Ako je data matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, nadji A^n .

Rešenje:

Inačin

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovoga možemo pretpostaviti da je $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1+2+\dots+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno, pošto je $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{to je onda } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1+2+\dots+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada ovo moramo dokazati primenom matematičke indukcije . Da bi se podsetili kako ide indukcija, pogledajte istoimenu fajl iz treće godine.

$$\text{za } n=1 \text{ je } A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tačno.}$$

$$\text{za } n=2 \text{ je } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ takodje tačno}$$

postavljamo **indukcijsku hipotezu**, da je formula tačna za $n = k$

$$\text{za } n=k \text{ je } A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da dokažemo da je formula tačna za $n = k + 1$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \rightarrow A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, naša formula je dobra.

II način

Datu matricu rastavimo na jediničnu i još jednu matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obeležimo matricu $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sa slovom M .

Tada je $A = I + M$

$$A^n = (I + M)^n$$

Koristimo $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$, ali najpre da vidimo kako se ponašaju stepeni matrice M .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ odavde zaključujemo da je:}$$

$$M^4 = M^5 = \dots = M^n = 0$$

Sad koristimo binomnu formulu:

$$(I + M)^n = \binom{n}{0}I^n M^0 + \binom{n}{1}I^{n-1}M^1 + \binom{n}{2}I^{n-2}M^2, \text{ svi ostali članovi su jednaki nuli.}$$

$$(I+M)^n = 1 \cdot I \cdot 1 + n \cdot I \cdot M + \frac{n(n-1)}{2} I \cdot M^2$$

$$(I+M)^n = I + n \cdot M + \frac{n(n-1)}{2} M^2$$

$$(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{2n+n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{2n+n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{(I+M)^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

9. Ako je data matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, nadji A^n .

Rešenje:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & -2^2 \\ -2^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & -2^3 \\ -2^3 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & -2^4 \\ -2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovoga možemo predpostaviti da je :

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Moramo ovo dokazati matematičkom indukcijom:

$$\text{za } n = 1 \text{ je } A^1 = \begin{bmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & -2^0 \\ -2^0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$\text{Pretpostavimo da je formula tačna za } n=k \quad A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}$$

Da dokažemo da formula važi i za $n = k + 1$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k-1} \cdot 1 + (-2^{k-1})(-1) & 2^{k-1} \cdot (-1) + (-2^{k-1}) \cdot 1 \\ -2^{k-1} \cdot 1 + 2^{k-1} \cdot (-1) & -2^{k-1} \cdot (-1) + 2^{k-1} \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & -2^{k-1} - 2^{k-1} \\ -2^{k-1} - 2^{k-1} & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^{k-1} & -2 \cdot 2^{k-1} \\ -2 \cdot 2^{k-1} & 2 \cdot 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & -2^k \\ -2^k & 2^k \end{bmatrix}$$

U sledećim primerima ćemo pokušati da vam “približimo” rešavanje matričnih jednačina. Takav zadatak se najčešće sastoji iz dva dela. U prvom delu trebate rešiti matričnu jednačinu, odnosno da izrazite X , a u drugom delu se koriste operacije sa matricama...

10. Rešiti sledeće matrične jednačine:

- 1) $AX = B$
- 2) $XA = B$
- 3) $AX - I = X + B$
- 4) $(3X)^{-1} + B^{-1} = (AX)^{-1}$
- 5) $(AX + A)^{-1} = BA$
- 6) $(AX^{-1} - B)^{-1} = XB$
- 7) $\left((AX)^T - X^T B \right)^{-1} = A - B$

Rešenja:

Bilo bi dobro da se podsetite pravila koja važe za matrice a koja su date u prethodnom fajlu.

1)

$$AX = B \quad \text{sa } \boxed{\text{leve}} \text{ strane množimo celu jednačinu sa } A^{-1}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\boxed{A^{-1}A}X = A^{-1}B$$

$$I \cdot X = A^{-1}B$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

2)

$XA = B$ sa desne strane množimo celu jednačinu sa A^{-1}

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X \cdot I = BA^{-1}$$

$$\boxed{X = BA^{-1}}$$

3)

$AX - I = X + B$ nepoznate na levu a poznate na desnu stranu...

$AX - X = B + I$ izvlačimo X kao zajednički ispred zagrade, ali sa desne strane!

$(A - I)X = B + I$ celu jednačinu množimo sa $(A - I)^{-1}$, ali sa leve strane!

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(B + I)$$

$$I \cdot X = (A - I)^{-1}(B + I)$$

$$\boxed{X = (A - I)^{-1}(B + I)}$$

4)

$$(3X)^{-1} + B^{-1} = (AX)^{-1}$$

$X^{-1} \cdot 3^{-1} + B^{-1} = X^{-1}A^{-1}$ Nepoznate na jednu, poznate na drugu stranu...

$B^{-1} = X^{-1}A^{-1} - X^{-1} \cdot 3^{-1}$ Izvlačimo X^{-1} kao zajednički ispred zagrade ali sa leve strane...

Pazi, moramo dodati I kod $3^{-1} = \frac{1}{3}$

$B^{-1} = X^{-1} \cdot (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$ Celu jednačinu množimo sa X sa leve strane

$$X \cdot B^{-1} = X \cdot X^{-1} \cdot (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$$

$$X \cdot B^{-1} = I \cdot (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$$

$X \cdot B^{-1} = (A^{-1} - \frac{1}{3}I)$ Celu jednačinu množimo sa B sa desne strane

$$X \cdot B^{-1}B = (A^{-1} - \frac{1}{3}I)B$$

$$X \cdot I = (A^{-1} - \frac{1}{3}I)B$$

$$\boxed{X = (A^{-1} - \frac{1}{3}I) \cdot B}$$

5)

$$(AX + A)^{-1} = BA \quad \text{unutar zagrade izvučemo } A \text{ sa leve strane}$$

$$[A(X + I)]^{-1} = BA \quad \text{celu jednačinu stepenujemo na } ()^{-1}$$

$$[A(X + I)^{-1}]^{-1} = (BA)^{-1}$$

$$A(X + I) = A^{-1}B^{-1} \quad \text{množimo celu jednačinu sa } A^{-1} \text{ sa leve strane}$$

$$A^{-1}A(X + I) = A^{-1}A^{-1}B^{-1}$$

$$I \cdot (X + I) = A^{-2}B^{-1}$$

$$X + I = A^{-2}B^{-1}$$

$$\boxed{X = A^{-2}B^{-1} - I}$$

6)

$$(AX^{-1} - B)^{-1} = XB \quad \text{celu jednačinu stepenujemo na } ()^{-1}$$

$$((AX^{-1} - B)^{-1})^{-1} = (XB)^{-1}$$

$$AX^{-1} - B = B^{-1} \cdot X^{-1} \quad \text{sad nepoznate na levu a poznate na desnu stranu...}$$

$$AX^{-1} - B^{-1}X^{-1} = B$$

$$(A - B^{-1})X^{-1} = B \quad \text{pomnožimo celu jednačinu sa } X \text{ ali sa desne strane...}$$

$$(A - B^{-1})X^{-1}X = BX$$

$$(A - B^{-1})I = BX$$

$$A - B^{-1} = BX \quad \text{pomnožimo celu jednačinu sa } B^{-1} \text{ ali sa leve strane...}$$

$$B^{-1}(A - B^{-1}) = B^{-1}BX$$

$$B^{-1}(A - B^{-1}) = I \cdot X$$

$$B^{-1}(A - B^{-1}) = X$$

$$\boxed{X = B^{-1}(A - B^{-1})}$$

7)

$$((AX)^T - X^T B)^{-1} = A - B$$

$$(X^T A^T - X^T B)^{-1} = A - B \quad \text{unutar zagrade izvučemo } X^T \dots$$

$$(X^T (A^T - B))^{-1} = A - B \quad \text{celu jednačinu na } -1 \dots$$

$$X^T (A^T - B) = (A - B)^{-1} \quad \text{sa desne strane množimo sa } (A^T - B)^{-1}$$

$$X^T (A^T - B)(A^T - B)^{-1} = (A - B)^{-1} \cdot (A^T - B)^{-1}$$

$$X^T = (A - B)^{-1} \cdot (A^T - B)^{-1} \quad \text{spakujemo malo desnu stranu}$$

$$X^T = [(A^T - B)(A - B)]^{-1} \quad \text{celu jednačinu transponujemo...}$$

$$(X^T)^T = \left([(A^T - B)(A - B)]^{-1} \right)^T$$

$$\boxed{X = \left([(A^T - B)(A - B)]^{-1} \right)^T}$$

11. Rešiti matričnu jednačinu $AX = X + A$ ako je data matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Rešenje:

Najpre rešavamo zadatu matričnu jednačinu:

$$AX = X + A$$

$$AX - X = A$$

$$(A - I)X = A$$

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}A$$

$$I \cdot X = (A - I)^{-1}A$$

$$\boxed{X = (A - I)^{-1} \cdot A}$$

Dalje tražimo matricu $A - I$, pa njenu inverznu. Ako vaš profesor dozvoljava, radi lakšeg rada, matricu $A - I$ možemo obeležiti nekim slovom, recimo sa M . Ako se profesor ljuti, vi nastavite da radite sa $A - I$.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M$$

sada je $X = M^{-1} \cdot A$

tražimo $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{adj}M$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1 \rightarrow \boxed{\det M = 1}, \text{ matrica je regularna...}$$

Ako vam se u radu dogodi da je $\det M = 0$, onda takva matrica nema inverznu matricu i tu prekidate sa radom.

Tražimo kofaktore i adjungovanu matricu:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \quad M &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & \quad M &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightarrow M_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
M &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & \quad M &= \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & \quad M &= \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightarrow M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\
M &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightarrow M_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & \quad M &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightarrow M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \quad M &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightarrow M_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

$$adjM = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ odavde smo dobili da je inverzna matrica:}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sad možemo da se vratimo u rešenje i da zamenimo:

$$\begin{aligned}
X &= M^{-1} \cdot A \\
X &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
X &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} \\
X &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

12. Rešiti matricnu jednačinu $AX - B = BX + I$ ako su date matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$AX - B = BX + I$$

$$AX - BX = B + I$$

$$(A - B)X = B + I$$

$$(A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}(B + I)$$

$$\boxed{X = (A - B)^{-1}(B + I)}$$

Izrazili smo X, sada tražimo inverznu matricu ...

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Kao i malopre, radi lakšeg rada, ovu matricu ćemo obeležiti sa M .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ onda je } M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{adj}M$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1$$

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow M_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 & \quad M &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{-2} & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow M_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 & \quad M &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \rightarrow M_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ M &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -1 & \boxed{0} & -1 \\ -2 & \boxed{1} & -3 \end{bmatrix} \rightarrow M_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 & \quad M &= \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -2 & \boxed{1} & -3 \end{bmatrix} \rightarrow M_{22} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2 & \quad M &= \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & -1 \\ -1 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \rightarrow M_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\ M &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & \boxed{-1} \\ -2 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix} \rightarrow M_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 & \quad M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ -2 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix} \rightarrow M_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \quad M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{bmatrix} \rightarrow M_{33} = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{adj}M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$B + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I konačno je :

$$X = (A - B)^{-1}(B + I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$