

MATRICE ZADACI (II DEO)

REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Sistem od m jednačina sa n nepoznatih je najčešće uopšteno dat sa:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ovde su: x_1, x_2, \dots, x_n nepoznate, brojevi a_{ij} su koeficijenti a b_1, b_2, \dots, b_m su slobodni članovi .

Iz ovog sistema mi izvlačimo tri matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ je matrica sistema.}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \vdots & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \text{ je proširena matrica sistema}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \text{ je matrica sa slobodnim članovima.}$$

Kada je A kvadratna matrica, to jest kada je broj jednačina sistema jednak sa brojem nepoznatih , onda takav sistem nazivamo **kvadratnim**. Ako je i $\det A \neq 0$ onda je on *Kramerovski*.

Ako je B nula matrica, sistem je **homogen**. (desno su sve nule)

Ako B nije nula matrica, sistem je **nehomogen**. (bar jedan slobodan član nije nula)

Koristeći ove matrice, jasno je da sistem možemo zapisati kao : $A \cdot X = B$ gde je $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$ rešenje sistema.

Još neki izrazi se upotrebljavaju često , pa i njih da objasnimo:

- **jedinstveno** rešenje je kad sistem ima samo **jedno** rešenje (**odredjen** je)
- kada sistem ima više od jednog rešenja kaže se da je **neodredjen**
- kada sistem ima rešenja, bez obzira dal je jedno il beskonačno mnogo njih, kaže se da je **rešiv** (**saglasan, neprotivrečan**)
- kada sistem **nema rešenja** kaže se da je **neresiv** (**nesaglasan, protivrečan**)

Teorema (Kroneker- Kapeli) kaže: (važi za nehomogen sistem)

Sistem ima rešenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu matrice proširenog sistema, tj $r(A) = r(\bar{A})$

Ako sistem ima maksimalan rang n , važi:

- i) rešenje je jedinstveno ako je $r(A) = r(\bar{A}) = n$
- ii) sistem ima beskonačno mnogo rešenja ako je $r(A) = r(\bar{A}) < n$

Često se javlja problem kad posmatramo **homogen** sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem uvek ima rešenje $(0, 0, 0, \dots, 0)$. Ovo se rešenje naziva **trivijalno** rešenje.

Pitamo se kad sistem ima i **netrivijalna** rešenja?

Homogen sistem ima netrivialna rešenja ako i samo ako je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih .

Posledica ove teoreme je :

Ako u homogenom sistemu važi da je broj jednačina manji od broja nepoznatih, onda sistem ima netrivialna rešenja.

Pre nego li krenemo sa zadacima, savetujemo vam da još jednom pročitate i proučite fajl **matrice**, a posebno deo vezan za traženje **ranga matrice**.

ZADACI

1. Odrediti rang matrice u zavisnosti od parametra a .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

Pre nego li krenete da pravite nule ispod glavne dijagonale, nije loše da parametar prebacimo da je u zadnjoj vrsti , na krajnjoj desnoj poziciji. Zato ćemo najpre da zamenimo mesta I vrsti i trećoj vrsti.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \quad \text{Sad pravimo nule na naznačenim mestima} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ \boxed{3} & 5 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & a \end{bmatrix}$$

III vrsta minus I vrsta pomnožena sa 2 ide u III vrstu

II vrsta minus I vrsta pomnožena sa 3 ide u II vrstu

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & a+3 \end{bmatrix} \quad \text{Sad pravimo još jednu nulu na mestu} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & \boxed{-7} & a+3 \end{bmatrix}$$

Od IV vrste oduzmemo III i to upišemo umesto treće vrste.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & a+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{Uočimo poziciju } \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Jasno je da ako je za $a = 0$, rang matrice 2, jer imamo matricu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A, ako je $a \neq 0$, rang matrice je tri, jer dobijamo matricu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, čija determinanta je različita od nule, jer ako

se sećate, vrednost determinante ove matrice je proizvod brojeva po glavnoj dijagonali: $\det A = 1 \cdot (-7) \cdot a$

2. Odrediti rang matrice u zavisnosti od parametra a .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

Pravimo nule na mestima $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ \boxed{1} & 1 & a & 1 \\ \boxed{1} & a & 1 & 1 \\ \boxed{a} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

II vrsta – I vrsta na mesto II vrste

III vrsta – I vrsta na mesto III vrste

IV vrsta – I vrsta pomnožena sa a na mesto IV vrste

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 0 & 1-a \end{bmatrix} \quad \text{Sad pravimo nule na mestima } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & \boxed{a-1} & 0 & 1-a \\ 0 & \boxed{1-a} & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

Uočimo treću kolonu. U njoj već ima nule koje nama trebaju. Zato ćemo zameniti mesta II i III koloni.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 0 & 1-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{bmatrix}$$

Dalje moramo napraviti nulu na uokvirenom mestu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{1-a} & 1-a \end{bmatrix}$$

Saberemo IV i III vrstu i to upišemo na mestu IV vrste...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-a) \end{bmatrix}$$

Odavde je već izvesno:

Ako je $a-1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$ rang matrice je 4.

Ako je $a-1=0 \rightarrow a=1$ matrica postaje $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa je rang matrice 1.

3. Dokazati da sledeći sistem ima netrivialna rešenja:

$$x + 2y - z - t - 3u = 0$$

$$3x + 4y - 5z - 3t - u = 0$$

$$2x + 3y - 3z - 2t - 2u = 0$$

$$2x + 5y - z - 2t - 10u = 0$$

Rešenje:

Ovde nam je posao da dokažemo da je rang manji od maksimalnog mogućeg ranga(to jest od 4) , jer je sistem

homogen i važi: **Ako u homogenom sistemu važi da je broj jednačina manji od broja nepoznatih, onda sistem ima netrivialna rešenja.**

Uočimo matricu sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

Kao i obično, najpre pravimo nule na mestima

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ \boxed{3} & 4 & -5 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & -3 & -2 & -2 \\ \boxed{2} & 5 & -1 & -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

II vrsta - I vrsta pomnožena sa 3 ide na mesto II vrste

III vrsta - I vrsta pomnožena sa 2 ide na mesto III vrste

IV vrsta - I vrsta pomnožena sa 2 ide na mesto IV vrste

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ \boxed{3} & 4 & -5 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & -3 & -2 & -2 \\ \boxed{2} & 5 & -1 & -2 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Sledeće nule moraju biti na mestima:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

III vrsta pomnožena sa dva minus II vrsta ide na mesto III vrste

IV vrsta pomnožena sa dva plus II vrsta na mesto IV vrste

Dobijamo matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jasno je da je rang ove matrice 2, što je manje od maksimalnog ranga, to jest, dokazali smo da sistem ima netrivialna rešenja.

U sledećem primeru ćemo pokazati kako se ona traže...

4. U zavisnosti od parametra m diskutovati rešenja sistema:

$$x + 2y + 3z + mt = 0$$

$$x + 2y + (m+2)z + 2t = 0$$

$$x + (m+1)y + 3z + 2t = 0$$

$$mx + 2y + 3z + 4t = 0$$

Rešenje:

Opet se radi o homogenom sistemu...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & m+2 & 2 \\ 1 & m+1 & 3 & 2 \\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Pravimo nule:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ \boxed{1} & 2 & m+2 & 2 \\ \boxed{1} & m+1 & 3 & 2 \\ \boxed{m} & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$II\text{vrsta} - I\text{vrsta} \rightarrow II\text{vrsta}$$

$$III\text{vrsta} - I\text{vrsta} \rightarrow III\text{vrsta}$$

$$IV\text{vrsta} - I\text{vrsta} \cdot m \rightarrow IV\text{vrsta}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & m+2 & 2 \\ 1 & m+1 & 3 & 2 \\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix}$$

Zamenimo mesta II i III vrsti...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & m+2 & 2 \\ 1 & m+1 & 3 & 2 \\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix}$$

$$IV\text{vrsta} + II\text{vrsta} \cdot 2 \rightarrow IV\text{vrsta}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 3(1-m) & 8-2m-m^2 \end{bmatrix}$$

I još da napravimo nulu na uokvirenom mestu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & \boxed{3(1-m)} & 8-2m-m^2 \end{bmatrix}$$

IVvrsta + IIIvrsta · 3 → IVvrsta

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 3(1-m) & 8-2m-m^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix}$$

Kao rang ove matrice mora biti manji od 4, da bi sistem imao netrivialna rešenja, na mestu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14-5m-m^2} \end{bmatrix} \text{ **mora** biti } 0.$$

Dakle:

$$14 - 5m - m^2 = 0$$

$$m^2 + 5m - 14 = 0 \rightarrow m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2}$$

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = -7$$

Postoje dve vrednosti za parametar m, za koje sistem ima netrivialna rešenja.

Moramo proučiti obe mogućnosti.

za $m = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz treće vrste imamo $1 \cdot z = 0 \rightarrow \boxed{z = 0}$

Iz druge vrste imamo $1 \cdot y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0}$

Iz prve vrste imamo $1x + 2y + 3z + 2t = 0 \rightarrow x + 2t = 0 \rightarrow \boxed{x = -2t}$

Rešenje je dakle $(x, y, z, t) = (-2t, 0, 0, t)$ gde je $t \in R$

za $m = -7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz treće vrste imamo $-8 \cdot z + 9t = 0 \rightarrow 8z = 9t \rightarrow \boxed{z = \frac{9t}{8}}$

Iz druge vrste imamo $-8 \cdot y + 9t = 0 \rightarrow 8y = 9t \rightarrow \boxed{y = \frac{9t}{8}}$

Iz prve vrste imamo $1x + 2y + 3z - 7t = 0 \rightarrow x + \frac{18t}{8} + \frac{27t}{8} - 7t = 0 \rightarrow$

$8x + 18t + 27t - 56t = 0 \rightarrow 8x = 11t \rightarrow \boxed{x = \frac{11t}{8}}$

Rešenje je dakle $(x, y, z, t) = (\frac{11t}{8}, \frac{9t}{8}, \frac{9t}{8}, t)$ gde je $t \in R$

Zaključak bi bio:

Za $m_1 \neq 2, m_2 \neq -7$ sistem ima samo trivijalna rešenja $(0, 0, 0, 0)$

Za $m = 2$ sistem ima rešenja $(x, y, z, t) = (-2t, 0, 0, t)$ gde je $t \in R$

Za $m = -7$ sistem ima rešenja $(x, y, z, t) = (\frac{11t}{8}, \frac{9t}{8}, \frac{9t}{8}, t)$ gde je $t \in R$

5. U zavisnosti od parametra a diskutovati rešenja sistema:

$$ax + y + z = 0$$

$$x + ay + z = 2$$

$$x + y + az = a$$

Rešenje:

Ovde se radi o **nehomogenom** sistemu.

$$\text{Matrica sistema je } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \text{ a matrica proširenog sistema je } \bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix}.$$

U matrici proširenog sistema pravimo nule na već opisani način...

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ \boxed{1} & a & a & \vdots & 2 \\ \boxed{1} & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix} \text{ najpre nule na ova dva mesta...}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & \vdots & 2a \\ 0 & a - 1 & a^2 - 1 & \vdots & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & \vdots & 2a \\ 0 & \boxed{a - 1} & a^2 - 1 & \vdots & a^2 \end{bmatrix} \text{ još ovde da napravimo nulu...}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & \vdots & 2a \\ 0 & a - 1 & a^2 - 1 & \vdots & a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a - 1)(a + 1) & a - 1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a - 1)(a + 2) & \vdots & a(a - 1)(a + 2) \end{bmatrix}$$

Sad koristimo Kroneker Kapelijevu teoremu:

Sistem ima rešenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rang matrice proširenog sistema, tj $r(A) = r(\bar{A})$

Ako sistem ima maksimalan rang n , važi:

- i) rešenje je jedinstveno ako je $r(A) = r(\bar{A}) = n$
- ii) sistem ima beskonačno mnogo rešenja ako je $r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\text{Posmatrajmo } \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix}.$$

Da bi sistem imao jedinstveno rešenje, rang sistema mora biti jednak rangu proširenog sistema.

Onda je jasno da na uokvirenim pozicijama NE SMEJU biti nule.

To je znači **uslov** da sistem ima jedinstveno rešenje. $a(a-1)(a+2) \neq 0$

Kako je svaka kolona vezana za po jednu nepoznatu, krenućemo od treće vrste, naći nepoznatu z , pa iz druge vrste naći nepoznatu y i na kraju iz prve vrste naći nepoznatu x .

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$$

treća jednačina:

$$a(a-1)(a+2) \cdot z = a(a-1)(a+2) \rightarrow \boxed{z=1}, \quad \text{naravno za } a \neq 0, a \neq 1, a \neq -2$$

druga jednačina:

$$(a-1)(a+1) \cdot y + (a-1) \cdot z = 2a$$

$$(a-1)(a+1) \cdot y + (a-1) \cdot 1 = 2a$$

$$(a-1)(a+1) \cdot y = 2a - a + 1$$

$$(a-1)(a+1) \cdot y = a + 1$$

$$y = \frac{\cancel{a+1}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{a-1}}$$

prva jednačina:

$$ax + y + z = 0$$

$$ax + \frac{1}{a-1} + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{1-a}}$$

Dobili smo jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(1, \frac{1}{a-1}, \frac{1}{1-a}\right)$

Ali tu **nije** kraj zadatka...

Moramo ispitati i situacije kad je $a+2=0 \rightarrow a=-2$ i $a-1=0 \rightarrow a=1$

Za $a=1$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Vrednost $a=1$ smo zamenili u dobijenoj matrici. Novonastala matrica nam govori sledeće:

Rang sistema je 1, jer posmatramo samo $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix}$ a rang proširenog sistema je 2. Znači da ovde sistem **nema** rešenja.

Za $a=-2$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ovde je rang sistema jednak rangu proširenog sistema, tj $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, ali kako je rang manji od maksimalnog ranga, sistem će imati beskonačno mnogo rešenja, odnosno : neodredjen je.

druga jednačina:

$$3y - 3z = -4$$

$$3y = 3z - 4$$

$$y = \frac{3z - 4}{3}$$

prva jednačina:

$$-2x + y + z = 0$$

$$-2x + \frac{3z - 4}{3} + z = 0$$

$$x = \frac{3z - 2}{3}$$

Dve nepoznate, x i y, smo izrazili preko treće, preko z. Rešenja su :

$$(x, y, z) = \left(\frac{3z - 2}{3}, \frac{3z - 4}{3}, z \right) \quad z \in R$$

6. U zavisnosti od parametra p , diskutovati i rešiti sistem:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + 5u &= 13 \\2x + 2y + z + 3u &= 11 \\x + y + z + u &= 3 \\2x + 2y + 2z + pu &= 3\end{aligned}$$

Rešenje:

Oformimo matricu proširenog sistema i radimo opisani postupak...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & :13 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & :11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & :3 \\ 2 & 2 & 2 & p & :3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{IIvrsta} - \text{Ivrsta} \cdot 2 \rightarrow \text{IIvrsta} \\ \text{IIIvrsta} - \text{Ivrsta} \rightarrow \text{IIIvrsta} \\ \text{IVvrsta} - \text{Ivrsta} \cdot 2 \rightarrow \text{IVvrsta} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & :13 \\ 0 & -2 & -5 & -7 & :-15 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & :-10 \\ 0 & -2 & -4 & p-10 & :-23 \end{bmatrix} \quad \text{II i III vrsta zamene mesta}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & :13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & :-10 \\ 0 & -2 & -5 & -7 & :-15 \\ 0 & -2 & -4 & p-10 & :-23 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{IIIvrsta} - \text{IIvrsta} \cdot 2 \rightarrow \text{IIIvrsta} \\ \text{IVvrsta} - \text{IIvrsta} \cdot 2 \rightarrow \text{IVvrsta} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & :13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & :-10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & :5 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & :-3 \end{bmatrix}$$

Ispod glavne dijagonale smo napravili nule. Sad diskutujemo. Uočimo poziciju sa parametrom od koje nam zavisi rang

$$\text{sistema: } \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & :13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & :-10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & :5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{p-2} & :-3 \end{bmatrix} \quad \text{Ako je ovde nula, to jest, ako je } \mathbf{p=2}, \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & :13 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & :-10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & :5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :-3 \end{bmatrix}$$

vidimo da je rang matrice sistema 3 a da je rang matrice proširenog sistema 4, a po teoremi Kroneker Kapelija tada sistem nema rešenja.

Dakle, da bi sistem imao rešenja, **mora da** je $p-2 \neq 0 \rightarrow \boxed{p \neq 2}$

Sad krenemo od četvrte vrste i tražimo vrednosti nepoznatih...Evo da napišemo sve četiri jednačine:

$$\begin{array}{ll} x+2y+3z+5u=13 & \text{iz prve vrste} \\ -y-2z-4u=-10 & \text{iz druge vrste} \\ -z+u=5 & \text{iz treće vrste} \\ (p-2)u=-3 & \text{iz četvrte vrste} \end{array}$$

$$(p-2)u=-3 \rightarrow \boxed{u = \frac{-3}{p-2}}$$

$$-z+u=5$$

$$z=u-5$$

$$z = \frac{-3}{p-2} - 5 \rightarrow z = \frac{-3-5p+10}{p-2} \rightarrow \boxed{z = \frac{7-5p}{p-2}}$$

itd...

$$\text{Dobijamo rešenje: } \boxed{u = \frac{-3}{p-2}, z = \frac{7-5p}{p-2}, y = \frac{20p-22}{p-2}, x = \frac{12(1-p)}{p-2}}$$

Evo jednog primera kako rešiti sistem jednačina pomoću inverzne matrice.

7. Rešiti sistem:

$$x+y+z=9$$

$$x+2y+3z=16$$

$$x+3y+4z=21$$

Rešenje:

Iz zadatog sistema najpre izdvojimo matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Oformimo matričnu jednačinu:

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$$

Sad radimo ceo postupak...

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 3 - 4 - 9 - 2 = -1, \text{ znači da postoji inverzna matrica...}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + 16 - 21 \\ 9 - 48 + 42 \\ -9 + 32 - 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje je dakle: $(x, y, z) = (4, 3, 2)$

Vidite i sami da je ovaj postupak težak, pa ga primenjujte samo kad to od vas izričito traže...