

## MATRICE (TEORIJA)

Za pravougaonu ( kvadratnu ) šemu brojeva  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,m$  a  $j=1,2,\dots,n$ ):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kažemo da je **matrica tipa**  $m \times n$ . Brojevi  $a_{ij}$  su elementi matrice.

Tip matrice je vrlo bitna stvar : kad kažemo da je matrica tipa  $m \times n$ , to znači da ona ima  **$m$  vrsta i  $n$  kolona**.

### Primer:

Matrica  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  je tipa  $2 \times 3$  jer ima dve vrste a tri kolone.

Matrica  $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \\ 7 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  je tipa  $4 \times 2$  jer ima 4 vrste i 2 kolone.

Matrice se najčešće obeležavaju ovim srednjim zagradama [ ], ali da vas ne zbuni, neki profesori ih obeležavaju i

malim zagradama ( ) a koriste se još i || || . Vi radite onako kako kaže vaš profesor...

Ako matrica ima **isti broj vrsta i kolona** ( $n \times n$ ), za nju kažemo da je **kvadratna matrica reda  $n$** .

Matrica čiji su **svi elementi jednaki nuli** naziva se **nula- matrica**.  $[0]$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , itd

Matrica  $-A$  definisana sa  $-A \stackrel{def}{=} (-1)A$  je **suprotna matrica** za matricu  $A$ .

Kvadtarna matrica reda  $n$  za koju je  $a_{ii} = 1$  ( po glavnoj dijagonali su jedinice a sve ostalo nule) naziva se **jedinična**

**matrica reda  $n$**  i označava se sa  $I_n$

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots itd$$

Neki profesori jediničnu matricu obeležavaju sa  $E$ . Vi radite onako kako kaže vaš profesor...

Ako su svi elementi kvadratne matrice reda  $n$  **ispod glavne dijagonale jednaki nuli**, takva se matrica naziva ***gornja trougaona matrica***.

Na primer :  $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$  je gornja trougaona matrica reda 3.

Ako su svi elementi kvadratne matrice reda  $n$  **iznad glavne dijagonale jednaki nuli**, takva se matrica naziva ***donja trougaona matrica***.

Na primer :  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$  je donja trougaona matrica reda 3.

Dve matrice  $A$  i  $B$  su **jednake** ako i samo ako su **istog tipa** i imaju **jednake odgovarajuće elemente**.

### Sabiranje i oduzimanje matrica

**Važno: Mogu se sabirati ( oduzimati ) samo matrice istog tipa!**

#### Primer

Neka su date matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ . Nadji matricu  $A+B$  i  $A-B$ .

Najpre primetimo da su matrice  $A$  i  $B$  istog tipa  $2 \times 3$ , to jest obe imaju 2 vrste i 3 kolone. To nam govori i da će matrica koja je njihov zbir takodje biti tipa  $2 \times 3$ .

Sabiraju se tako što sabiramo “ mesto s mestom”...krenemo od mesta na prvoj vrsti i koloni  $2+3=5$  itd...

$$A+B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{3} & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2+3} & 7+3 & -5+(-5) \\ 4+(-1) & 2+4 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{5} & 10 & -10 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Analogno radimo i oduzimanje:

$$A-B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{3} & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2-3} & 7-3 & -5-(-5) \\ 4-(-1) & 2-4 & 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

## Množenje matrice skalarom (brojem)

**Važno: Matrica se množi brojem tako što se SVI elementi matrice pomnože tim brojem!**

Pazite, ovde često dođe do greške jer smo, ako se sećate, rekli da se **determinanta** množi brojem tako što se samo jedna vrsta ili kolona pomnoži tim brojem, a kod **matrice** svaki element množimo tim brojem.

### Primer

Neka je data matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Odrediti matricu  $3A$ .

Naravno, kod množenja matrice skalarom tip matrice se ne menja.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 21 & -6 \\ 6 & 3 & 18 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

## Množenje matrica

**Važno : Proizvod dve matrice je definisan samo ako je broj kolona prve matrice jednak sa brojem vrsta druge matrice!**

Ako recimo uzmemo da je matrica  $A$  tipa  $m \times n$  a matrica  $B$  tipa  $n \times p$  onda će matrica, recimo  $C$ , koja se dobija njihovim množenjem biti tipa  $m \times p$ .

$A \cdot B = C$  a tip odredjujemo  $(m \times \cancel{n}) \cdot (\cancel{n} \times p) = m \times p$  (kao da se skrate unutrašnji)

### Primer

Date su matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{.Odrediti njihov proizvod } AB.$$

Najpre da vidimo koji tip će imati matrica koja se dobija njihovim proizvodom:

$A$  je tipa  $2 \times 3$ , dok je  $B$  tipa  $3 \times 2$  pa će matrica njihovog proizvoda biti tipa  $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$ .

Dakle imaće dve vrste i dve kolone.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Kako sada računati? Imamo dakle 4 "mesta".}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{prva vrsta} \cdot \text{prva kolona} & \text{prva vrsta} \cdot \text{druga kolona} \\ \text{druga vrsta} \cdot \text{prva kolona} & \text{druga vrsta} \cdot \text{druga kolona} \end{bmatrix}$$

prva vrsta · prva kolona dobijamo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

prva vrsta · druga kolona dobijamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) = 0 + 6 + 1 = 7$$

druga vrsta · prva kolona :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0 + 2 + 3 = 5$$

druga vrsta · druga kolona :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 0 + 6 - 3 = 3$$

Sad ovo ubacimo gore:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Naravno, vi ne morate da radite ovoliko postupno, kad se izvežbate, sve će ići mnogo brže...

Za proizvod matrica važe zakoni:

- 1)  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- 2)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  i  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- 3)  $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A)B = A(\alpha \cdot B)$   $\alpha$  je skalar ( broj)
- 4)  $I \cdot A = A \cdot I$  gde je I jedinična matrica

**Važno: Za matrice u opštem slučaju ne važi komutativnost množenja**  $A \cdot B \neq B \cdot A$

Ako je A matrica tipa  $m \times n$ , onda se njena **transponovana matrica**  $A^T$  dobija kada u matrici A **kolone i vrste zamene mesta**. Tip matrice  $A^T$  je onda naravno  $n \times m$ .

Primer

Ako je recimo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , onda je  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Ako je recimo  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

**Matrica A za koju je  $A = A^T$  naziva se simetrična matrica.**( naravno, matrica A mora biti kvadratna)

Primer

Ako je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ , kad zamenimo mesta kolone u vrste, dobijamo  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Dakle, ova matrica je simetrična!

Za operaciju **transponovanja** važe sledeće osobine:

- 1)  $(A^T)^T = A$
- 2)  $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$       $\alpha$  je skalar
- 3)  $(A + B)^T = A^T + B^T$      ako su matrice A i B istog tipa
- 4)  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Dalje se moramo upoznati sa **determinantama**.

Ova tema je obrađena u posebnom fajlu determinante, a mi ćemo vas podsetiti na neke najvažnije stvari.

Determinantu kvadratne matrice  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$  obeležavamo sa **det (A) ili |A|** a zapisujemo :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Znači da determinante , za razliku od matrica , pišemo u zagradama | | . **Determinanta je broj a matrica je šema!**

Nećemo vas daviti sa teorijom, već ćemo na par primera objasniti kako se računaju determinante:

### DRUGOG REDA

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Računaju se tako što pomnožimo elemente na takozvanoj glavnoj

dijagonali, pa od toga oduzmemo pomnožene elemente na sporednoj dijagonali.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 12 - (-5) \cdot 3 = -12 + 15 = 3$$

## TREĆEG REDA

Determinante trećeg reda možemo razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni. Najpre svakom elementu dodelimo predznak + ili -, i to radimo neizmenično:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \text{Samo da vas podsetimo: vrste su } \longrightarrow, \text{ a kolone } \downarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{Ako recimo hoćemo da razvijemo po prvoj vrsti=}$$

$$= + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ ili ako recimo razvijamo po drugoj koloni:}$$

$$= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

**Najbolje je ,naravno, da razvijamo po onoj koloni ili vrsti gde ima najviše nula !**

Primer: Izračunaj vrednost determinante  $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{Najpre iznad svakog broja napišite predznake: } \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \text{ ili ako vam je}$$

lakše samo iznad brojeva u vrsti ili koloni po kojoj ste rešili da razvijete determinantu. Mi smo rešili po drugoj vrsti jer ima jedna nula (moglo je i po trećoj koloni, sve jedno).

Dakle:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(3 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + 7(5 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = -3 + 56 = 53$$



$$\begin{vmatrix} + & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ - & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ + & & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ - & & & \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Naravno, sad bi trebalo da razvijemo svaku od ove četiri determinante trećeg reda....

Složitete se da ovo nije baš lako.

Naučimo zato osobine determinanata koje će nam pomoći u rešavanju zadataka.

## OSOBI NE DETERMINANATA

- 1. Determinanta menja znak ako dve vrste ili kolone izmenjaju svoja mesta.**
- 2. Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste i kolone promene svoje uloge.**
- 3. Determinanta se množi brojem, kad se tim brojem pomnože svi elementi ma koje (ali samo jedne) vrste ili kolone.**  
**Obrnuto, zajednički faktor elemenata jedne vrste ili kolone može se izvući ispred determinante**

Na primer:

$$k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 k & b_1 k & c_1 k \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 k & b_1 & c_1 \\ a_2 k & b_2 & c_2 \\ a_3 k & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ itd. ili}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 4. Ako je u determinanti svaki element neke k-te vrste (kolone) zbir dva ili više sabiraka, onda je ona jednaka zbiru dve ili više determinanata, koje imaju iste elemente kao i data determinanta, osim elemenata k-te vrste (kolone).**

Na primer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + m_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + m_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + m_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. **Ako su svi elementi jedne vrste(kolone) jednaki nuli, vrednost determinante je nula.**

Primeri:

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 & 55 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & 68 & 34 & -80 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

6. **Ako elementi u dve vrste ili kolone imaju iste vrednosti, vrednost determinante je opet nula.**

Primer:

$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 6 \\ 12 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{jer su elementi prve i treće vrste jednaki}$$

7. **Ako su dve vrste ( kolone ) proporcionalne među sobom , vrednost determinante je opet nula.**

Primer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -9 & 5 & 56 \\ 10 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{jer su prva i treća vrsta proporcionalne, tj. prva puta 3 daje treću vrstu.}$$

8. **Vrednost neke determinante ostaje nepromenjena ako se elementima jedne vrste(kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste(kolone) pomnoženi istim brojem!**

**Ova osma osobina će nam pomoći da lakše rešimo determinante četvrtog i višeg reda.**

9.  $\det A = \det A^T$

**Ako transponujemo matricu , vrednost njene determinante se ne menja.**

**Minor** ( u oznaci  $M_{ij}$  ) elementa  $a_{ij}$  determinante reda  $n$  jeste determinanta matrice reda  $n-1$  koja se dobija

izostavljanjem  $i$ -te vrste i  $j$ -te kolone iz date matrice.

**Kofaktor** ( u oznaci  $A_{ij}$  ) elementa  $a_{ij}$  determinante reda  $n$  definišemo sa  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

### Primer

Ako posmatramo matricu  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ , njeni minori i kofaktori će biti:

### Minori:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, & M_{12} &= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, & M_{13} &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, & M_{22} &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, & M_{23} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, & M_{32} &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, & M_{33} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Kako smo dobili recimo minor  $M_{11}$  ?

Oznaka 11 nam govori da poklapamo prvu vrstu i prvu kolonu:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

, ono što ostane stavimo u malu

determinantu.

**Minor**  $M_{12}$  dobijamo kad poklopimo prvu vrstu i drugu kolonu (12):

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

, ostaje  $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ , itd.

### Kofaktori:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Šta možemo primetiti kod kofaktora što se tiče znakova?

Pa, znaci idu naizmenično, kao kad smo razvijali determinante:  $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Ako vaš profesor dozvoljava, možete izbeći da pišete ono  $(-1)^{i+j}$ , već odma uzmete znakove neizmenično.

*Jedan od čestih zadataka na fakultetima je traženje inverzne matrice. Ona se upotrebljava za rešavanje sistema jednačina, matičnih jednačina...*

Najpre ćemo reći nešto o **adjungovanoj** matrici.

Naka je data matrica  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , ili skraćeno zapisana  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ .

Matricu  $\|A_{ij}\|^T$ , gde su  $A_{ij}$  kofaktori elemenata  $a_{ij}$  matrice  $A$ , nazivamo **adjungovana** ( pridružena ) matrica za matricu  $A$  i označavamo je sa :

$$\boxed{\text{adj}A = \|A_{ij}\|^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}}$$

Primer:

Data je matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Odrediti njenu adjungovanu matricu  $\text{adj}A$ .

Najpre tražimo kofaktore...Onda njih poredjamo u matricu...

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{3} & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0} \\ 0 & 3 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightarrow A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_{21} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{5} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ 1 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightarrow A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightarrow A_{31} = + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightarrow A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightarrow A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Sad ove vrednosti menjamo u :  $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ , pa je  $adjA = \begin{bmatrix} 6 & -10 & 10 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Sad možemo definisati i *inverznu matricu*.

Naka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . Ako postoji matrica  $A^{-1}$  reda  $n$  takva da je  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ , gde je

$I_n$  jedinična matrica reda  $n$ , tada kažemo da je  $A^{-1}$  inverzna matrica matrice  $A$ .

Formula po kojoj tražimo inverznu matricu je :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$$

Naravno, treba reći da inverzna matrica postoji ako i samo ako je  $\det A \neq 0$ .

**Inverzna matrica je, ako postoji, jedinstvena!**

Primer

Određiti inverznu matricu matrice  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

Radimo po formuli:  $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \text{adj}B$

Najpre tražimo **det B**, jer ta vrednost mora biti različita od nule da bi postojala inverzna matrica...

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} \text{ koristimo Sarusov postupak...}$$
$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot (-7) - (-3) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-7) - 1 \cdot (-5) \cdot 5 =$$
$$= -30 - 30 - 28 + 36 + 28 + 25 = -88 + 89 = 1$$

$$\boxed{\det B = 1}$$

Dalje tražimo **adj B**.

$$\text{adj}B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ \boxed{4} & -5 & 2 \\ \boxed{5} & -7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B_{11} = + \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -15 - (-14) = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & \boxed{-5} & 2 \\ 5 & \boxed{-7} & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -[12 - 10] = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \rightarrow B_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -28 - (-25) = -3$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ \boxed{5} & -7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -[-9 - (-7)] = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{-3} & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ 5 & \boxed{-7} & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \rightarrow B_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -[-14 - (-15)] = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 \\ \boxed{4} & -5 & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \rightarrow B_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -6 - (-5) = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{-3} & 1 \\ 4 & \boxed{-5} & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \rightarrow B_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \rightarrow B_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-12) = 2$$

Poredjamo kofaktore u matricu  $\text{adj} B$ .

$$\text{adj}B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ sada se vraćamo u formulu } B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \text{adj}B, \text{ pa je :}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ako za matricu  $A$  postoji inverzna matrica, kažemo da je matrica  $A$  regularna matrica.

U protivnom, za matricu  $A$  kažemo da je **singularna** (neregularna).

Evo nekoliko pravila koja važe za regularne matrice:

- 1)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 2)  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- 3)  $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$

Ako za kvadratnu matricu  $A$  važi da je  $A^T = A^{-1}$ , onda nju nazivamo *ortogonalna matrica*.

### Rang matrice

Najpre da kažemo koje su elementarne transformacije matrica:

- i) zamena mesta dve vrste (*kolone*)
- ii) množenje elemenata jedne vrste (*kolone*) nekim brojem koji je različit od nule
- iii) dodavanje elementima jedne vrste (*kolone*) elemenata (odgovarajućih) neke druge vrste (*kolone*) koji su prethodno pomnoženi proizvoljnim brojem.

Matrica  $A$  je ekvivalentna sa matricom  $B$  (oznaka  $A \sim B$ ) ako se od matrice  $A$  može preći na matricu  $B$  primenom konačno mnogo ekvivalentnih transformacija.

Posmatrajmo neku matricu  $A \in M_{m \times n}$  ( matricu  $A$  iz skupa matrica  $M$  tipa  $m \times n$  )

**Ako u matrici  $A$  izostavimo neke vrste ili neke kolone ( a može istovremeno i vrste i kolone), tako dobijenu matricu nazivamo PODMATRICA matrice  $A$ .**

**Determinantu kvadratne podmatrice reda  $k$  matrice  $A \in M_{m \times n}$  nazivamo MINOR reda  $k$  matrice  $A$ .**

Neka je  $M_{m \times n}$  skup svih matrica tipa  $m \times n$  i  $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  skup prirodnih brojeva ( sa 0).

**Rang matrice u oznaci rang ( ili  $r$ ) je preslikavanje:**

$$\text{rang} : M_{m \times n} \rightarrow N_0$$

određeno sa

a)  $\text{rang}(A) = 0$  ako je  $A$  nula matrica

b)  $\text{rang}(A) = p$  , ako postoji minor **reda  $p$**  matrice  $A$  koji je **različit od nule** , a **SVI** minori **većeg reda od  $p$** , ukoliko oni postoje, **su jednaki nuli**.

### Primer 1.

Odrediti rang matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ .

*Rešenje:*

Retko kada možemo odmah reći koji je rang date matrice.

Prvi posao nam je da koristeći navedene **elementarne transformacije** matrica napravimo ekvivalentnu matricu koja će **ispod glavne dijagonale imati sve nule!** ( takozvana **TRAPEZNA** matrica)

Kod nas su na glavnoj dijagonali 2 i -2, pa ispod njih pravimo nule.

Za našu matricu nule moraju biti na UOKVIRENIM mestima:  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \boxed{1} & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{-6} \end{bmatrix}$

I **redosled** “pravljenja” nula je vrlo bitan!

Nule pravimo najpre na mestu  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ \boxed{3} & -6 \end{bmatrix}$ , zatim na mestu  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \boxed{1} & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$  i na kraju  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & \boxed{-6} \end{bmatrix}$ .

Neki profesori traže da se svaki korak transformacija objašnjava, neki dozvoljavaju da se odmah prave nule na svim mestima u prvoj koloni, pa u drugom koraku na svim mestima u drugoj koloni, itd.

Naš savet je kao i uvek da poslušate vašeg profesora kako on zahteva a mi ćemo pokušati da vam objasnimo “ korak po korak”.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ . Najpre ćemo zameniti mesta prvoj i drugoj vrsti, da nam jedinica bude u prvoj vrsti zbog lakšeg računanja ( ovo nije neophodno al olakšava posao...)

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{Sad pravimo nulu na mestu gde je 3:} \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ \boxed{3} & -6 \end{bmatrix}$$

Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -3 i sabrati sa trećom vrstom i to upisati u treću vrstu.

Na mestu gde je bilo 3 biće:  $1 \cdot (-3) + 3 = \boxed{0}$

Na mestu gde je bilo -6 biće  $-2 \cdot (-3) + (-6) = \boxed{0}$

Pa je  $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Dalje nam treba nula gde je dvojka:  $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \boxed{2} & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -2, sabrati sa drugom vrstom i upisati umesto druge vrste:

Na mestu gde je bilo 2 na taj način smo dobili nulu, a na mestu gde je bilo -4 biće:  $-2 \cdot (-2) + (-4) = \boxed{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Sad razmišljamo:** Pošto je matrica tipa  $3 \times 2$ , njen maksimalni rang može biti 2, jer postoje samo determinante drugog reda. Ali, koju god da uzmemo determinantu drugog reda ona će imati u jednoj vrsti obe nule a znamo da je vrednost takve determinante nula. Rang ove matrice je znači 1, u oznaci  $r(A) = 1$ .

**Primer 2.**

Odrediti rang matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

*Rešenje:*

Ova matrica je tipa  $3 \times 3$ , tako da postoji determinanta reda 3, a to znači da i maksimalni rang može biti 3.

Da se ne zalićemo, prvo mi da napravimo nule ispod glavne dijagonale, na uokvirenim mestima:  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{0} & 5 \end{bmatrix}$

Zameni ćemo drugu i prvu kolonu, jer već imamo nulu...

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  sad pravimo nulu na mestu gde je 1 (uokvireno)

Saberemo prvu i drugu vrstu i to ide u drugu vrstu...

Na mestu gde je 1 (uokvireno) biće 0.

Na mestu gde je 2 biće:  $2+1=3$

Na mestu gde je 1 biće:  $4+1=5$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 5 \end{bmatrix}$  dalje pravimo nulu na uokvirenom mestu (gde je 3):

Od treće vrste oduzmemo drugu i to ide u treću vrstu.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sad je jasno da rang **ne može** biti **tri** jer je vrednost determinante  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Ako recimo uzmemo  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ , njena vrednost je  $-3 \neq 0$ , pa je rang ove matrice 2:  $r(A) = 2$

**Evo još nekoliko stvari koje bi trebalo da znamo o matricama:**

- 1) Ekvivalentne matrice imaju isti rang!
- 2) Ako posmatramo tri matrice  $A, B$  i  $C$  iz skupa svih matrica  $M_{m \times n}$ , za njih važi:

$A \sim A \rightarrow$  *refleksivnost*

$A \sim B \Rightarrow B \sim A \rightarrow$  *simetricnost*

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C \rightarrow$  *tranzitivnost*

Ovo nam govori da je  $\sim$  **relacija ekvivalencije** na skupu svih matrica tipa  $m \times n$ .

- 3) Neka je  $A$  matrica ranga  $p$  većeg ili jednakog jedinici  $p \geq 1$ . Tada postoje  $p$  nezavisnih vrsta (kolona) matrice  $A$  takvih da su ostale vrste (kolone) linearne kombinacije tih  $p$  vrsta (kolona).
- 4) Rang matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih vrsta (kolona) te matrice.