

1) Krivolinijski integral prve vrste

i) Ako je $f(x,y,z)$ definisana i neprekidna u svakoj tački deo po deo glatke krive c date sa:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad \text{gde je} \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad \text{i} \quad ds\text{-diferencijal luka krive}$$

tada se krivolinijski integral prve vrste izračunava po formuli:

$$\int_c f(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} dt$$

Ovaj integral ne zavisi od orijentacije krive!

ii) Ako je kriva data u obliku $c: y=y(x) \quad a \leq x \leq b$ tada je:

$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y_x')^2} dx$$

iii) Ako je kriva data u obliku $c: x=x(y) \quad m \leq y \leq n$ tada je :

$$\int_c f(x, y) ds = \int_m^n f(x(y), y) \sqrt{1 + (x_y')^2} dy$$

Izračunavanje dužine krive c : $S = \int_c ds$

2. Krivolinijski integral druge vrste

i) Ako je kriva c zadata parametarskim jednačinama:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \quad \text{gde je } t_0 \leq t \leq t_1 \quad \text{tada je:} \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

$$\int_c P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t] dt$$

ii) Ako je kriva c zadata u ravni $y=y(x)$ i $a \leq x \leq b$ tada je:

$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x] dx$$

iii) Ako je kriva zadata u ravni $x=x(y)$ i $m \leq y \leq n$ tada je :

$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_m^n [P(x(y), y)x'_y + Q(x(y), y)] dy$$

PAZI: Krivolinijski integral druge vrste zavisi od orijentacije krive . Pozitivan smer je smer suprotan kretanju

kazaljke na časovniku.

$$\int_{c^+} = - \int_{c^-}$$

Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

- 1) $\int_c P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ ne zavisi od putanje integracije
- 2) Postoji funkcija $u=u(x,y)$ tako da je $du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ i tada važi :
$$\int_A^B P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(B) - u(A)$$
- 3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$
- 4) $\int_c P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ ako je kriva c zatvorena.

Grinova formula:

Ako kriva C ograničava oblast D (to jest ona je rub oblasti D) pri čemu D ostaje sa leve strane prilikom obilaska krive C , i važi da su funkcije P,Q,R neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi formula:

$$\oint_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Iz Grinove formule se lako dokazuje da je **površina oblasti P(D)** koja je ograničena krivom C data formulom:

$$P(D) = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$$