

Izvodi imaju široku primenu. O upotrebi izvoda u ispitivanju toka funkcije ( monotonost, ekstremne vrednosti, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost) biće posebno reči u delu o funkcijama.

**Ovde ćemo pokazati na nekoliko primera kako rešavati zadatke u kojima se traži da 'nešto' bude maksimalno ili minimalno.**

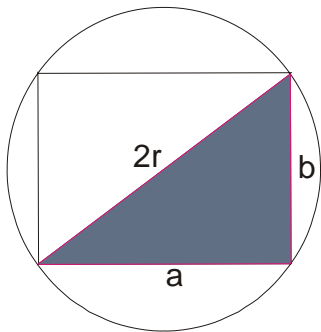
To su teži zadaci, mogu biti i **ispitni** na nekim fakultetima. Zahtevaju odlično poznavanje cele srednjoškolske matematike , moramo najčešće nacrtati sliku i postaviti problem tako što oformimo funkciju sa jednom ili dve nepoznate i od nje nađemo izvod. Kad prvi izvod izjednačimo sa nulom dobijemo traženo rešenje.

### ZADACI:

**1. U kružnici poluprečnika  $r$  upisan je pravougaonik maksimalne površine. Odrediti dimenzije pravougaonika i maksimalnu površinu.**

#### Rešenje:

Najpre moramo skicirati problem i naći odgovarajuću vezu između podataka:



Znamo da se površina pravougaonika računa po formuli  $P = ab$

Naš posao je da  $a$  ili  $b$  izrazimo preko  $r$  i to zamenimo u formuli za površinu.

Primenićemo pitagorinu teoremu na ofarbani trougao:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2$$

$$4r^2 = a^2 + b^2 \quad \text{odavde je} \quad a^2 = 4r^2 - b^2 \quad \text{to jest} \quad a = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

$$P = ab$$

$$P = b\sqrt{4r^2 - b^2} \quad \text{Od ove površine tražimo izvod 'po b', ali pazimo jer r moramo tretirati kao konstantu!}$$

$$P' = b \cdot \sqrt{4r^2 - b^2} + (\sqrt{4r^2 - b^2})' \cdot b \quad \text{Pazi, izvod složene funkcije je ovo!}$$

[www.matematiranje.com](http://www.matematiranje.com)

$$P' = \sqrt{4r^2 - b^2} + \frac{-2b}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} b$$

$$P' = \sqrt{4r^2 - b^2} + \frac{-b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} \quad \text{Nadjemo zajednički...}$$

$$P' = \frac{4r^2 - b^2 - b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

$$P' = \frac{4r^2 - 2b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} \quad \text{Sad ovo izjednačimo sa 0. ( Samo brojilac, naravno)}$$

$$P' = 0 \quad \text{je za} \quad 4r^2 - 2b^2 = 0 \quad \text{a odavde je} \quad b = r\sqrt{2}, \quad \text{pa to zamenimo u} \quad a = \sqrt{4r^2 - b^2} \quad \text{i dobijamo}$$

$$a = \sqrt{4r^2 - 2r^2}$$

$$a = \sqrt{2r^2}$$

$a = r\sqrt{2}$  a kako smo već našli da je  $b = r\sqrt{2}$  to zaključujemo da je traženi pravougaonik ustvari kvadrat čija je stranica  $a = r\sqrt{2}$ , pa će tražena površina biti:

$$P = a^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$$

**Jedna napomena:** Bilo bi nam malo lakše da smo umesto funkcije  $P = b\sqrt{4r^2 - b^2}$  posmatrali funkciju

$P = \sqrt{4b^2r^2 - b^4}$  koju smo dobili kad b uvučemo pod koren. Ili još bolje da posmatramo neku funkciju,

nazovimo je recimo  $f = 4b^2r^2 - b^4$ , koja ima istu maksimalnu vrednost kao i funkcija  $\sqrt{4b^2r^2 - b^4}$ .

**Još jedna napomena:** Kako da znamo da je dobijeno rešenje baš maksimum, odnosno minimum?

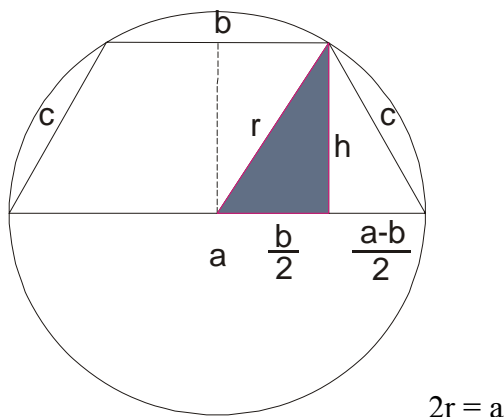
Trebalo bi naći drugi izvod i to potvrditi jer ako je  $f'' > 0$  u nekoj tački, onda je ta tačka minimum a ako je

$f'' < 0$  u nekoj tački, onda je ta tačka maksimum. Ovo ispitujte ako traži Vaš profesor!

**2. U polukružnici poluprečnika r upisan je trapez, čija je veća osnovica prečnik kružnice. Odrediti visinu**

i manju osnovicu trapeza, tako da mu površina bude maksimalna.

Rešenje:



Površina trapeza se kao što znamo računa po formuli :  $P = \frac{a+b}{2}h$

Na osenčenom trouglu ćemo primeniti pitagorinu teoremu:

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{pa je} \quad h = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2r+b}{2} \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \quad \text{malo prisredimo i dobijamo}$$

$$P = \frac{(2r+b)\sqrt{4r^2 - b^2}}{4} \quad \text{možemo odavde tražiti izvod ili je možda pametnije da prvo sve uvučemo pod koren...}$$

$$P = \frac{\sqrt{(2r+b)^2(4r^2 - b^2)}}{4}$$

Sada možemo posmatrati samo funkciju  $(2r+b)^2(4r^2 - b^2)$  koja ima istu maksimalnu vrednost kao i P.

Dakle, obeležimo sa (uzmite neko slovo)  $G = (2r+b)^2(4r^2 - b^2)$  i nađimo njen izvod «po b»

$$G = (2r+b)^2(4r^2 - b^2)$$

$$G' = 2(2r+b)(4r^2 - b^2) + (-2b)(2r+b)^2 \quad \text{izvučemo zajednički...}$$

$$G' = (2r+b)[2(4r^2 - b^2) - 2b(2r+b)]$$

$$G' = (2r+b)[8r^2 - 2b^2 - 4rb - 2b^2]$$

$$G' = (2r+b)[8r^2 - 4rb - 4b^2]$$

Ovo sada izjednačavamo sa 0.

$$G' = 0$$

$$(2r + b)[8r^2 - 4rb - 4b^2] = 0 \text{ odavde je } 2r + b = 0 \text{ ili } 8r^2 - 4rb - 4b^2 = 0$$

Iz  $2r + b = 0$  dobijamo  $b = -2r$  što je očigledno **nemoguće**, pa dakle mora biti:

$$8r^2 - 4rb - 4b^2 = 0 \quad \text{podelimo sve sa 4}$$

$2r^2 - rb - b^2 = 0$  napravimo proizvod ... (Ima objašnjeno u delu I godina, na sajtu), a može da se radi i kao kvadratna...

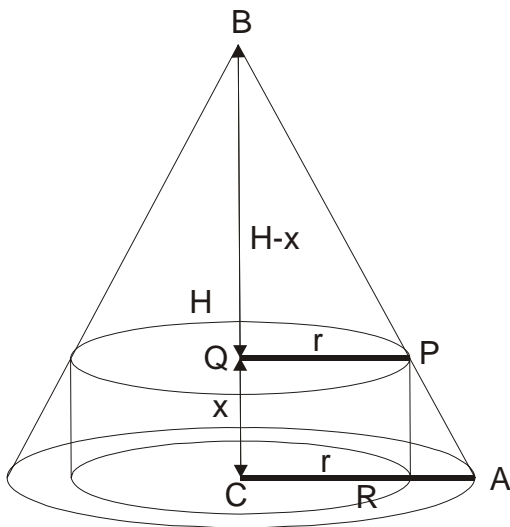
$$(r - b)(b + 2r) = 0 \quad \text{Odavde je očigledno } r = b$$

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \text{ pa kad zamenimo } r = b \text{ dobijamo } h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{2r+r}{2} \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3r}{2} \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

**3. Odrediti dimenzije pravog kružnog valjka, maksimalne zapremine, koji se može upisati u pravu kružnu kupu poluprečnika R i visine H.**

**Rešenje:**



Naravno, prvo nacrtamo sliku...

**Uočimo trouglove BCA i BQP.** Oni su očigledno slični, pa su odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$CA : QP = BC : BQ \quad \text{to jest}$$

$$R : r = H : (H - x) \quad \text{gde je sa } x \text{ obeležena visina valjka ( vidi sliku)}$$

$$R(H - x) = rH$$

$$RH - Rx = rH$$

$$RH - rH = Rx \quad \text{i odavde je} \quad x = \frac{(R - r)H}{R}$$

Znamo da se zapremina valjka računa po formuli :  $V = r^2 \pi H$ , to jest ,pošto smo visinu obeležili sa  $x$

$$V = r^2 \pi x$$

$$V = r^2 \pi \frac{(R - r)H}{R} \quad \text{sredimo ovo i nadjimo izvod po } r$$

$$V = \frac{(r^2 R - r^3)H\pi}{R} \quad \text{Pazi , kad radimo izvod po } r \text{ , sve ostale nepoznate su "kao" konstante!}$$

$$V' = \frac{(2rR - 3r^2)H\pi}{R} \quad \text{sada ovo izjednačimo sa } 0 \text{ . Dakle } V' = 0 \text{ za } \frac{(2rR - 3r^2)H\pi}{R} = 0 \text{ to jest}$$

$$2rR - 3r^2 = 0$$

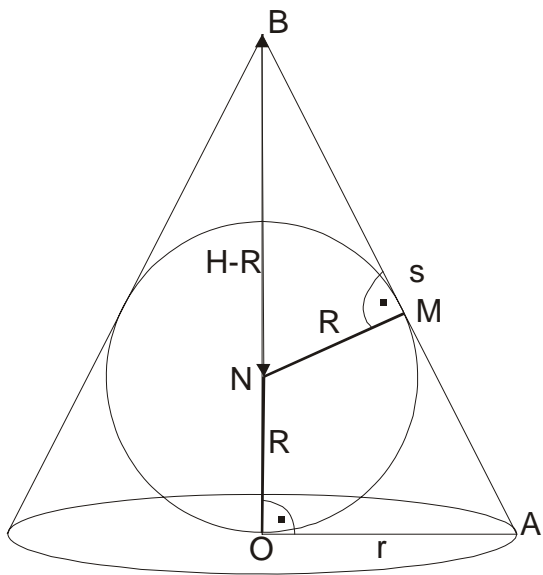
$$r(2R - 3r) = 0 \quad \text{pa je odavde} \quad r = \frac{2R}{3} \text{ , vratimo ovo u } x = \frac{(R - r)H}{R} \text{ i dobijamo } x = \frac{H}{3}$$

$$V_{\max} = \left(\frac{2R}{3}\right)^2 \pi \frac{H}{3} = \frac{4R^2 H \pi}{27}$$

**4. Među svim pravim kupama opisanim oko lopte poluprečnika  $R$  , odrediti onu čija je zapremina minimalna.**

**Rešenje:**

Kao i obično, prvo moramo nacrtati sliku:



**Uočimo trouglove OAB i MNB.** Oni su slični jer imaju po dva ista ugla. Iz njihove sličnosti sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica.

$$\mathbf{OA : MN = AB : BN} \quad \text{Znamo da je } s^2 = r^2 + H^2 \text{ to jest } s = \sqrt{r^2 + H^2}$$

$$r : R = \sqrt{r^2 + H^2} : (H - R)$$

$$r(H - R) = R \sqrt{r^2 + H^2} \quad \text{kvadriramo...}$$

$$r^2(H - R)^2 = R^2 (r^2 + H^2) \quad \text{sredimo i izrazimo H...}$$

$$H = \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2}$$

Zapremina kupe se računa po formuli :  $V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$  Ovde zamenimo H što smo izrazili...

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2} \quad \text{malo prisredimo...}$$

$$V = \frac{2\pi}{3} \frac{r^4 R}{r^2 - R^2} \quad \text{odavde tražimo izvod po r i pazimo, jer je R kao konstanta i u pitanju je izvod količnika!}$$

$$V' = \frac{2\pi}{3} \frac{4r^3 R(r^2 - R^2) - 2r(r^4 R)}{(r^2 - R^2)^2}$$

$$V' = \frac{2\pi}{3} \frac{4r^5 R - 4r^3 R^3 - 2r^5 R}{(r^2 - R^2)^2}$$

$$V' = \frac{2\pi}{3} \frac{2r^5 R - 4r^3 R^3}{(r^2 - R^2)^2} \quad \text{naravno } V' = 0$$

$2r^5 R - 4r^3 R^3 = 0$  pa je odavde

$2r^3 R(r^2 - 2R^2) = 0$  to jest  $r^2 - 2R^2 = 0$  pa je  $r = \sqrt{2} R$ , vratimo se da nadjemo **H**

$$H = \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2} = 4R, \text{ dakle } \mathbf{H = 4R}$$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$  kad zamenimo  $r$  i  $H$  dobijamo:

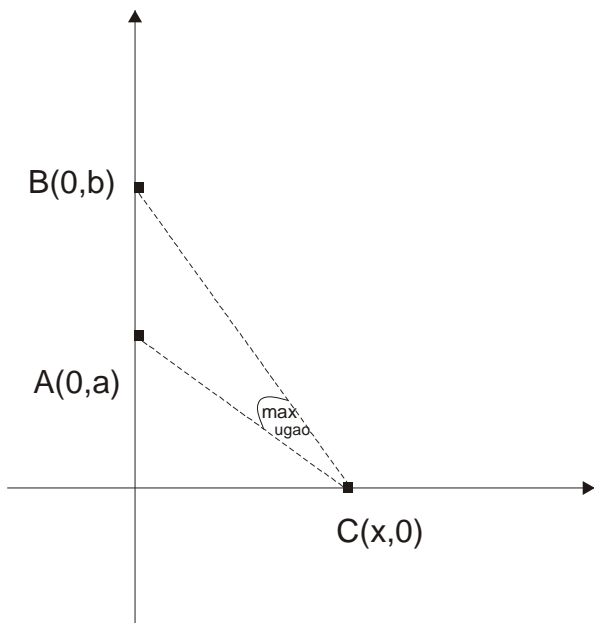
$$V_{\min} = \frac{1}{3} (\sqrt{2} R)^2 \pi 4R$$

$$V_{\min} = \frac{8\pi}{3} R^3$$

5. Date su tačke  $A(0,a)$  i  $B(0,b)$ , gde je  $0 < a < b$ . Odredi koordinatu  $x$  tačke  $C(x,0)$  gde je  $x > 0$  tako da se duž  $AB$  vidi pod maksimalnim uglom iz tačke  $C$ .

**Rešenje:**

I ovde ćemo najpre nacrtati sliku i postaviti problem:



Ideja je da koristimo formulu za ugao između dve prave  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ .

Naći ćemo koeficijente pravca za pravu AC i za pravu BC.

Iskoristićemo formulu  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

$$\text{Za pravu AC je } k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - a}{x - 0} = -\frac{a}{x}$$

$$\text{Za pravu BC je } k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - b}{x - 0} = -\frac{b}{x}$$

$$\text{Sada je } \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{b}{x} + \frac{a}{x}}{1 + \frac{a b}{x x}} = \text{sredimo} = \frac{x(a - b)}{x^2 + ab} \text{ znači da je :}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x(a - b)}{x^2 + ab} \text{ odnosno } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x(a - b)}{x^2 + ab} \text{ Sad od ovog tražimo izvod:}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x(a - b)}{x^2 + ab}$$

$$\alpha' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x(a - b)}{x^2 + ab}\right)^2} \left(\frac{x(a - b)}{x^2 + ab}\right)'$$

$$\alpha' = \frac{1}{(x^2 + ab)^2 + x^2(a-b)^2} (a-b) \frac{x^2 + ab - 2x^2}{(x^2 + ab)^2} \text{ pokratimo i spakujemo}$$

$$\alpha' = \frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2 + ab)^2 + x^2(a-b)^2} \text{ Sad ovo izjednačimo sa 0, naravno samo brojilac!}$$

$$ab - x^2 = 0 \text{ pa je } x^2 = ab \text{ odnosno traženo rešenje je } x = \sqrt{ab}$$

Dakle koordinata x je geometrijska sredina koordinata a i b !

**ZA RADOZNALE: POGLEDAJ PROBLEM “SLIKA NA ZIDU” I PRIMENI OVO REŠENJE!**

[www.matematuranje.com](http://www.matematuranje.com)