

IZVODI ZADACI (IV deo)

LOGARITAMSKI IZVOD

Logaritamskim izvodom funkcije $y = f(x)$, gde je $y > 0$ i $y \neq 1$, nazivamo izvod logaritma te funkcije, to jest:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Primer 1.

Nadji izvod funkcije $y = x^x$

Rešenje: Najpre ćemo logaritmovati ovu jednakost sa \ln (to beše prirodni logaritam za osnovu e) a zatim ćemo primeniti jedno od pravila vezana za logaritme: $\ln A^n = n \ln A$

$y = x^x$ logaritmujemo

$\ln y = \ln x^x$ ovo x u izložiocu ide ispred logaritma...

$\ln y = x \ln x$ sada diferenciramo (pazi, na desnoj strani je izvod proizvoda)

$$\frac{y'}{y} = x' \ln x + (\ln x)' x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} x \quad \text{skratimo } x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad \text{sada sve pomnožimo sa } y$$

$$y' = y(\ln x + 1) \quad \text{ovde zamenimo } y \text{ sa } x^x$$

$$y' = x^x(\ln x + 1) \text{ je konačno rešenje!}$$

Primer 2.

Nadji izvod funkcije $y = (\cos x)^{\sin x}$

Postupak je isti: logaritmujemo, pa pravilo za log., pa sredjujemo...

Rešenje:

$$y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \ln (\cos x)^{\sin x} \quad \text{prebacimo } \sin x \text{ ispred logaritma...}$$

$$\ln y = \sin x \ln(\cos x) \quad \text{sada diferenciramo}$$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \ln(\cos x) + [\ln(\cos x)]' \sin x \quad \text{Pazi } \ln(\cos x) \text{ je izvod složene funkcije}$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x} (\cos x)' \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \sin x \quad \text{prisredimo malo ...}$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad \text{sve pomnožimo sa } y$$

$$y' = y \left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] \quad \text{zamenimo } y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] \quad \text{je konačno rešenje}$$

Primer 3.

$$\text{Nadji izvod } y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$$

Rešenje:

$$y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x} \quad \text{logaritmujeemo}$$

$$\ln y = \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \quad \text{diferenciramo, pazimo jer na desnoj strani je izvod proizvoda a ima i složena funkcija...}$$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \left[\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]' \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{1}{\ln x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \sin x \quad \text{pazi } \left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{ mora kao izvod količnika}$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{x}{\ln x} \frac{\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)}{x^2} \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{x}{\ln x} \frac{(1 - \ln x)}{x^2} \sin x \quad \text{skratimo po jedno } x \text{ i sredimo...}$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{(1 - \ln x)}{x \ln x} \sin x \quad \text{sve pomnožimo sa } y$$

$$y' = y \left[\cos x \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{(1 - \ln x)}{x \ln x} \sin x \right] \quad \text{zamenimo } y = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x}$$

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\sin x} \left[\cos x \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{(1 - \ln x)}{x \ln x} \sin x \right] \quad \text{kraj zadatka}$$

IZVOD FUNKCIJE DATE U PARAMETARSKOM OBLIKU

Ako u funkciji $y=f(x)$ promenljive x i y zavise od parametra t ($x=x(t)$ i $y=y(t)$), prvi izvod funkcije $y=f(x)$ se

računa po formuli :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Primer 1.

Izračunati prvi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku: $x = 2t - t^2$ i $y = 4t - t^3$

Rešenje:

$$x = 2t - t^2 \quad \text{odavde je } x'_t = 2 - 2t$$

$$y = 4t - t^3 \quad \text{odavde je } y'_t = 4 - 3t^2$$

Sada x'_t i y'_t ubacimo u formulu:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4 - 3t^2}{2 - 2t} \quad \text{i evo rešenja!}$$

Primer 2.

Izračunati prvi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku: $x = r \cos t$ i $y = r \sin t$

Rešenje: (pazimo jer r je kao konstanta pošto radimo po t)

$$x = r \cos t \quad x'_t = -r \sin t$$

$$y = r \sin t \quad y'_t = r \cos t$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-r \cos t}{r \sin t} = \text{skratimo } r = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t \quad \text{konačno rešenje}$$

Primer 3.

Izračunati prvi izvod funkcije: $x = \cos t + t \sin t$ i $y = \sin t - t \cos t$

Rešenje:

$$x = \cos t + t \sin t \quad \text{odavde je } x'_t = -\sin t + [t' \sin t + (\sin t)' t] = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$$y = \sin t - t \cos t \quad \text{pa je } y'_t = \cos t - [t' \cos t + (\cos t)' t] = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t \sin t}{t \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$$

IZVOD IMPLICITNO ZADATE FUNKCIJE

Kada je funkcija $y = f(x)$ zadata u implicitnom obliku $F(x,y) = 0$, njen prvi izvod dobijamo iz relacije:

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$$

Primer 1.

Izračunati prvi izvod funkcije: $x^3 - 2y - y^2 = 0$

Rešenje:

Obeležimo sa $F(x,y) = x^3 - 2y - y^2$

Šta je ovde štos?

Od članova sa x-som tražimo normalno izvode, a kod onih gde se javlja i y (ipsilon) nadjemo izvod i dodamo još y' . Tako da u našem primeru od x^3 izvod je $3x^2$, od y izvod je $1y'$ a od y^2 je izvod $2yy'$. Dakle:

$$F(x,y) = x^3 - 2y - y^2$$

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 3x^2 - 2y' - 2yy' \text{ pa sad ovo izjednačimo sa } 0$$

$$3x^2 - 2y' - 2yy' = 0 \text{ odavde sada izrazimo } y' \text{ i to je to .}$$

$$3x^2 = 2y' + 2yy'$$

$$3x^2 = 2y'(1+y) \text{ pa je } y' = \frac{3x^2}{2(1+y)} \text{ konačno rešenje}$$

Primer 2.

Izračunati prvi izvod funkcije: $x^2 + xy + y^2 + 6 = 0$

Rešenje:

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 6$$

Pazimo : xy mora kao izvod proizvoda !

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 2x + y + xy' + 2yy'$$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \quad \text{odavde moramo da izrazimo } y'$$

$$xy' + 2yy' = -2x - y$$

$$y'(x + 2y) = -2x - y \quad \text{pa je } y' = \frac{-2x - y}{x + 2y} \quad \textbf{konačno rešenje}$$

Primer 3.

$$\text{Izračunati prvi izvod funkcije: } e^{xy} = x^3 - y^3$$

Rešenje:

Možemo odmah diferencirati , a možemo prvo oformiti funkciju F(x,y), kako više volite!

Mi ćemo odmah diferencirati :

$$e^{xy} = x^3 - y^3$$

$$e^{xy}(xy)' = 3x^2 - 3y^2y'$$

$$e^{xy}(y + xy') = 3x^2 - 3y^2y'$$

$$e^{xy}y + e^{xy}xy' = 3x^2 - 3y^2y' \quad \text{sada da izrazimo } y'$$

$$e^{xy}xy' + 3y^2y' = 3x^2 - e^{xy}y$$

$$y'(e^{xy}x + 3y^2) = 3x^2 - e^{xy}y \quad \text{pa je odavde}$$

$$y' = \frac{3x^2 - e^{xy}y}{e^{xy}x + 3y^2} \quad \textbf{konačno rešenje}$$

Primer 4.

$$\text{Izračunati prvi izvod funkcije: } x^y - y^x = 0$$

Ovde je malo teža situacija, jer moramo da logaritmujemo funkciju pa tek onda da tražimo izvod.

$$x^y = y^x \quad \text{logaritmujemo}$$

$$\ln x^y = \ln y^x \quad \text{izložioce prebacimo ispred } \ln \dots$$

$y \ln x = x \ln y$ sada izvod , ali kao izvod proizvoda!

$$y' \ln x + y \frac{1}{x} = \ln y + \frac{1}{y} y' x$$

$$y' \ln x - \frac{x}{y} y' = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$y' \left(\ln x - \frac{x}{y} \right) = \ln y - \frac{y}{x} \quad \text{i izrazimo } y'$$

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} \quad \text{konačno rešenje}$$

IZVOD INVERZNE FUNKCIJE

Neka funkcija f ima prvi izvod različit od 0 na nekom intervalu i neka je g njena inverzna funkcija . Tada i g ima izvod i pri tome važi:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Često se ova formula zapisuje u obliku :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{a može i} \quad x'_y y'_x = 1$$

Primer 1.

Ako je $y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, da nadjemo izvod od y !

Pošto je $y = \arcsin x$, tada je $x = \sin y$, primenimo $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ i dobijamo:

$$\begin{aligned}
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \{ \text{sad iskoristimo da je } \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \text{ to jest } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \{ \text{sad vratimo da je } \sin y = x \} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
 \end{aligned}$$

Znači, dobili smo da je $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Primer 2.

Ako je $y = \operatorname{arctg} x$ **i** $-\infty < x < \infty$ **i** $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ **da nadjemo izvod od y !**

Kako je $y = \operatorname{arctg} x$ to je inverzna funkcija $x = \operatorname{tg} y$, pa primenimo $y'_x = \frac{1}{x'_y}$:

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{tgy})'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \{ \text{kako je } \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \} \\
 &= \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} \text{ a kako je } \operatorname{tgy} = x \\
 &= \frac{1}{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

Dakle: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

Primer 3.

Ako je $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ **i** $-\infty < y < \infty$, **da nadjemo izvod.**

Inverzna funkcija za $y = \log_a x$ je $x = a^y$, pa je po formuli $y'_x = \frac{1}{x'_y}$:

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \frac{1}{(a^y)'} = \text{znamo da je izvod od } a^y = a^y \ln a = \\ &= \frac{1}{a^y \ln a} = \text{i sad samo zamenimo da je } x = a^y \\ &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

$$\text{Dakle : } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$