

INTEGRALI ZADACI (IV DEO) – Integracija racionalne funkcije

Racionalna funkcija je oblika $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Može biti **prava i neprava**.

Prava racionalna funkcija je ona kod koje je maksimalni stepen polinoma P(x) manji od maksimalnog stepena

polinoma Q(x). (na primer : $\frac{x}{x^2-3}$, $\frac{x^2-3x+12}{x^3+5x^2-2x+1}$, $\frac{4}{x^5+5x^2-22x+31}$ itd.)

Neprava racionalna funkcija je ona kod koje je max stepen P(x) veći ili jednak sa max stepenom Q(x).

(na primer : $\frac{x^2+2x-7}{x^2-13}$, $\frac{x^2-3x+12}{2x+1}$, $\frac{x^4+75x^2-14}{x+3}$ itd.) . U slučaju da je zadata neprava racionalna funkcija **moramo** podeliti ta dva polinoma , dobiti rešenje plus prava racionalna funkcija.

Integraciju prave racionalne funkcije vršimo tako što :

Imenilac rastavimo na činioce upotrebom:

- izvlačimo zajednički ispred zagrade
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ ako nam je data kvadratna jednačina
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ili $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ razlika, odnosno zbir kubova
- Koristimo Bezuovu teoremu ili sklapamo “ dva po dva” ako je dat polinom većeg stepena

Dalje datu pravu racionalnu funkciju rastavljamo na sledeći način:(primeri)

$$\frac{P(x)}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} \text{ ako su u imeniocu svi linearni bez stepena , svaki ide sa po jednim slovom: A,B,C...}$$

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+7} \text{ ako u imeniocu imamo linearne članove , ali sa stepenom,}$$

rastavljamo dok ne dođemo do najvećeg stepena.

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ ako u imeniocu imamo nerazloživ polinom , za njega moramo da uzmemo}$$

izraz tipa $Bx+C$ (pazi na ovo)

$$\frac{P(x)}{(x-7) \cdot (x^2+5)^2 \cdot x^3} = \frac{A}{x-7} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+5)^2} + \frac{F}{x} + \frac{G}{x^2} + \frac{H}{x^3} \text{ evo primera gde i nerazloživ činilac u imeniocu koji}$$

je na kvadrat moramo dva puta da uzimamo u razlaganju.

PRIMERI

$$\boxed{1.} \quad \int \frac{x-3}{x^3-x} dx = ?$$

Ovde se radi o pravoj racionalnoj funkciji, pa odmah krećemo sa razlaganjem. Najpre imenilac rastavimo na činioce!

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

Dakle, naš integral je $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = ?$

Izvučemo racionalnu funkciju:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \quad \text{sve pomnožimo sa } x(x-1)(x+1)$$

$$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x-3 = A(x^2-1) + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx$$

$$x-3 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx \quad \text{"sklopimo" uz } x^2, \text{ pa one uz } x, \text{ pa slobodne članove...}$$

$$x-3 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A \quad \text{sad vršimo upoređivanje: članovi uz } x^2, \text{ pa uz } x, \text{ pa bez } x$$

$$A+B+C=0 \rightarrow \text{Na levoj strani nemamo član } x^2 \text{ ili možemo dodati da je to } 0 \cdot x^2$$

$$B-C=1 \rightarrow \text{Na levoj strani imamo } x, \text{ to jest } 1 \cdot x, \text{ a na desnoj } x(B-C)$$

$$-A=-3 \rightarrow \text{Ovo su oni bez } x\text{-seva}$$

Rešavamo ovaj sistem jednačina:

$$A+B+C=0$$

$$B-C=1$$

$$\underline{-A=-3}$$

$$\boxed{A=3} \rightarrow A+B+C=0 \rightarrow 3+B+C=0 \rightarrow B+C=-3$$

$$\begin{array}{l} B-C=1 \\ B+C=-3 \end{array} \rightarrow 2B=-2 \rightarrow \boxed{B=-1} \rightarrow \boxed{C=-2}$$

Vratimo rešenja:

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

E sad se vratimo da rešimo dati integral, jer smo ga rastavili na tri mala integrala koji su najčešće ili tablični ili se rešavaju smenom.

$$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$= \boxed{3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C}$$

Možda će vaš profesor da traži da “spakujete” rešenje upotrebom pravila za logaritme. Da se podsetimo:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
4. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
5. $\ln x^n = n \ln x$
6. $e^{\ln x} = x$

Naše rešenje će biti:

$$3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C = \ln|x|^3 - (\ln|x-1| + \ln|x+1|^2) + C = \ln|x|^3 - \ln|x-1| \cdot |x+1|^2 + C =$$

$$= \boxed{\ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C}$$

$$\boxed{2.} \quad \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx = ?$$

Opet se radi o pravoj racionalnoj funkciji. Izvlačimo je i rastavljamo:

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)}$$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \quad \text{sve pomnožimo sa } x^2(x-2)$$

$$x+2 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

$$x+2 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2$$

$$1 \cdot x + 2 = x^2(A+C) + x(-2A+B) - 2B \quad \text{sad vršimo upoređivanje}$$

$$A+C=0$$

$$-2A+B=1$$

$$\underline{-2B=2}$$

Rešavamo ovaj sistem jednačina, iz treće jednačine odmah dobijamo vrednost za B

$$\boxed{B=-1} \rightarrow -2A+B=1 \rightarrow -2A-1=1 \rightarrow \boxed{A=-1} \rightarrow \boxed{C=1}$$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{x+2}{x^2(x-2)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \ln|x-2| + C$$

Malo prisredimo rešenje:

$$\ln|x-2| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C = \boxed{\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{1}{x} + C}$$

$$\boxed{3.} \quad \int \frac{x^3 + x^2 - 16x + 16}{x^2 - 4x + 3} dx = ?$$

Ovo je nepravna racionalna funkcija (stepen u brojiocu je veći od stepena imenioca), pa moramo podeliti ova dva polinoma (podsetite se deljenja, fajl polinomi iz I godine).

$$\frac{x^3 + x^2 - 16x + 16}{x^2 - 4x + 3} =$$

$$(\cancel{x^3} + x^2 - 16x + 16) : (x^2 - 4x + 3) = x + 5$$

$$\underline{\cancel{\pm x^3} \mp 4x^2 \pm 3x}$$

$$\quad \quad \quad \underline{\pm 5x^2 - 19x + 16}$$

$$\quad \quad \quad \underline{\cancel{\pm 5x^2} \mp 20x \pm 15}$$

$$\quad \quad \quad \boxed{x+1} \rightarrow \text{ostatak}$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 16x + 16}{x^2 - 4x + 3} = x + 5 + \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$$

Dobili smo pravu racionalnu funkciju koju dalje rastavljamo:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} =$$

$$x^2-4x+3=0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

$$x+1 = A(x-3) + B(x-1)$$

$$x+1 = Ax - 3A + Bx - B$$

$$x+1 = x(A+B) - 3A - B$$

$$A+B=1$$

$$\underline{-3A - B = 1}$$

$$-2A = 2 \rightarrow \boxed{A = -1} \rightarrow \boxed{B = 2}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

Rešimo sada i ceo integral:

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3} = x+5 + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = x+5 + \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

$$\int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3} dx = \int \left(x+5 + \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x - \ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} + 5x + \ln \frac{(x-3)^2}{|x-1|} + C}$$

$$\boxed{4.} \quad \int \frac{xdx}{x^3-3x+2} = ?$$

Prava racionalna funkcija, izdvojimo je:

$$\frac{x}{x^3-3x+2} =$$

Najpre da funkciju u imeniocu rastavimo na činioce...

$$x^3-3x+2=0 \quad \text{ideja je da sklapamo "2 po 2" zato rastavimo } -3x = -x - 2x$$

$$x^3 - x - 2x + 2 = 0$$

$$x(x^2-1) - 2(x-1) = 0$$

$$x \boxed{(x-1)}(x+1) - 2 \boxed{(x-1)} = 0$$

$$(x-1)[x(x+1) - 2] = 0$$

$$(x-1)(x^2+x-2) = 0 \rightarrow x-1=0 \vee x^2+x-2=0 \rightarrow x_1=1, x_2=1, x_3=-2$$

$$x^3-3x+2 = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \dots \cdot (x-1)^2(x+2)$$

$$x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

$$x = A(x^2 + x - 2) + Bx + 2B + C(x^2 - 2x + 1)$$

$$x = Ax^2 + Ax - 2A + Bx + 2B + Cx^2 - 2Cx + C$$

$$\underline{1 \cdot x = x^2(A+C) + x(A+B-2C) - 2A+2B+C} \quad \text{sad uporedjujemo}$$

$$A+C=0$$

$$A+B-2C=1$$

$$\underline{-2A+2B+C=0}$$

$$C=-A$$

$$A+B+2A=1$$

$$\underline{-2A+2B-A=0}$$

$$3A+B=1$$

$$\underline{-3A+2B=0}$$

$$3B=1 \rightarrow \boxed{B=\frac{1}{3}} \rightarrow 3A=\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{A=\frac{2}{9}} \rightarrow \boxed{C=-\frac{2}{9}}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{2}{9}}{x+2}$$

Još da rešimo integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx &= \int \frac{\frac{2}{9}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-\frac{2}{9}}{x+2} dx = \\ &= \frac{2}{9} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{3} \int (x-1)^{-2} dx - \frac{2}{9} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \boxed{\frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \ln|x+2| + C} \end{aligned}$$

$$\boxed{5.} \quad \int \frac{x dx}{x^3 - x^2 + x - 1} = ?$$

Postupak je dakle isti: kako se radi o pravoj racionalnoj funkciji, nju izdvajamo i rastavljamo na sabirke.

U imeniocu imamo polinom trećeg stepena koji moramo rastaviti na činioce. Upotrebićemo sklapanje '2 po 2',

A možemo koristiti i Bezuovu teoremu.

$$\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} =$$

Da sredimo imenilac prvo...

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + 1(x-1) = (x-1)(x^2 + 1)$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 1} \rightarrow \text{pazi } x^2 + 1 \text{ je nerazloživ u } R$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 1} \dots \cdot (x-1)(x^2 + 1)$$

$$x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$x = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$x = x^2(A + B) + x(-B + C) + A - C$$

$$A + B = 0$$

$$-B + C = 1$$

$$A - C = 0 \rightarrow A = C$$

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1$$

$$2A = 1 \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2 + 1} \right)$$

Vratimo se da rešimo zadati integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)(x^2 + 1)} dx &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \left(\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \arctg x \right) + C} \end{aligned}$$

$$\boxed{6.} \quad \int \frac{4}{x^4 + 1} dx = ?$$

Ovo je već malo ozbiljniji zadatak!

$$\frac{4}{x^4 + 1} =$$

Ovde je problem: Kako rastaviti imenilac na činioce?

Trik je da dodamo i oduzmemo $2x^2$, da napunimo pun kvadrat pa iskoristimo formulu za razliku kvadrata!

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)$$

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$\frac{4}{x^4 + 1} = \frac{4}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$$

$$\frac{4}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \dots \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$4 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$4 = Ax^3 + A\sqrt{2}x^2 + Ax + Bx^2 + B\sqrt{2}x + B + Cx^3 - C\sqrt{2}x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D$$

$$4 = x^3(A + C) + x^2(A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D) + x(A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2}) + B + D$$

Uporedjujemo :

$$A + C = 0$$

$$A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0$$

$$A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0 \rightarrow \underline{A + C = 0 \rightarrow B\sqrt{2} - D\sqrt{2} = 0 \rightarrow \sqrt{2}(B - D) = 0 \rightarrow B - D = 0}$$

$$B + D = 4$$

$$B - D = 0$$

$$B + D = 4$$

$$\boxed{B = 2} \wedge \boxed{D = 2}$$

$$A + C = 0$$

$$\sqrt{2}(A - C) = -4$$

$$\boxed{A = -\sqrt{2}} \wedge \boxed{C = \sqrt{2}}$$

Zamenimo :

$$\frac{4}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

$$\frac{4}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{-\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

Imamo dakle da rešimo:

$$\int \frac{4}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \int \frac{-\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$$

Ovo su integrali tipa $I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ koji se rešavaju preko $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ i formule:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + (B - \frac{Ab}{2a}) I_1 + C$$

Postupak rešavanja je objašnjen u jednom od fajlova integrali - zadaci .

Evo konačnog rešenja a vi ga proverite .

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C}$$

7. Kad smo u prvom fajlu integrali zadaci (I deo) davali tablicu integrala pomenuli smo i integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \text{ kao tablični. Da vidimo kako smo došli do rešenja istog.}$$

On se radi kao racionalna funkcija:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \dots \dots \dots / \cdot (x-a)(x+a)$$

$$1 = A(x+a) + B(x-a)$$

$$1 = Ax + Aa + Bx - Ba$$

$$1 = x(A+B) + Aa - Ba$$

Uporedjujemo :

$$A + B = 0$$

$$a(A - B) = 1$$

$$A + B = 0$$

$$A - B = \frac{1}{a}$$

$$2A = \frac{1}{a} \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2a}} \wedge \boxed{B = -\frac{1}{2a}}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} + \frac{-1}{2a} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx &= \int \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C \\ &= \boxed{\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C}\end{aligned}$$