

INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

1. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ Ovo su integrali gde su $\sin x$ i $\cos x$ bez stepena. Uzimamo smenu:

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, odavde je $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ Posle smene svede se na integral racionalne funkcije.

Primeri: $\int \frac{1}{\sin x} dx$, $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 3}$, $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$, $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$

2. $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx$.Ovde $\sin x$ i $\cos x$ imaju stepene. Uzimamo smenu:

$\operatorname{tg} x = t$, odavde je $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$

Primeri: $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$, $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x - \sin^3 x} dx$, $\int \frac{\sin^2 x}{\sin 2x + \cos^2 x} dx$

3. Integrali u kojima se daje proizvod se rešavaju pomoću sledećih trigonometrijskih formula:

$$\sin a x \sin b x = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin a x \cos b x = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos a x \cos b x = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

Primeri: $\int \sin 3x \cos 4x dx$, $\int \cos 5x \cos 2x dx$, $\int \sin x \sin 7x dx$

NEKI TRIKOVI:

Ako je u integralu izraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, onda je zgodno uzeti smenu $x = a \sin t$ jer tako uništavamo koren

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin x)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 (\sin x)^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 x} = a \cos x$$

Ako je u integralu dat izraz $\sqrt{x^2 + a^2}$, onda je zgodno uzeti smenu $x = a \operatorname{tg} t$ jer tako uništavamo koren

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{(a \operatorname{tg} x)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 x + a^2} = a \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} = a \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = a \frac{1}{\cos x}$$

