

HORNEROVA ŠEMA

U fajlovima iz prve godine srednje škole, polinomi i algebarski izrazi, smo naučili kako se dele polinomi i kako se pomoću Bezuovog stava dobija ostatak pri deljenju polinoma.

Engleski matematičar **Horner** je napravio šemu za deljenje polinoma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ sa $x - c$.

Ideju je dobio u teoremi o jednakosti dva polinoma: *Polinomi P i Q su identični ako i samo ako su istog stepena i ako su im koeficijenti uz iste stepene od x jednaki.*

Da mi prepričamo njegovu ideju...

Kad delimo polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, koji je n -tog stepena sa $x - c$, dobijamo polinom

$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, koji je $n-1$ stepena i ostatak, to jest :

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x) + r$$

Sredjujući ovo i upoređujući odgovarajuće koeficijente Horner je dobio formule:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{k-1} &= a_k + c \cdot b_k \quad \text{gde je } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ r &= a_0 + c \cdot b_0 \end{aligned}$$

Ovo zapisano u obliku šeme bi bilo:

	a_n	a_{n-1}	a_k	a_0
c	b_{n-1}	$b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot b_{n-1}$	$b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k$	$r = a_0 + c \cdot b_0$

Evo nekoliko primera koji će vam verovatno razjasniti primenu Hornerove šeme...

Primer 1.

Podeliti polinom $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ sa $x - 1$

Rešenje:

Iz polinoma $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ “pročitamo” da je:

$a_4 = 2$ jer je to koeficijent uz najveći stepen x^4

$a_3 = -1$ jer je to koeficijent uz stepen x^3

$a_2 = 3$ jer je to koeficijent uz stepen x^2

$a_1 = -4$ to je koeficijent uz x

$a_0 = 1$ član bez x - sa (slobodan član)

Iz polinoma $x - 1$ “pročitamo” da je: $c = 1$ (upoređujemo $x - 1$ sa $x - c$)

Da postavimo Hornerovu šemu:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Sad zamenimo vrednosti ...

	2	-1	3	-4	1
1	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Po Hornerovim formulicama računamo vrednosti za b - ove.

$$b_{n-1} = a_n$$

Iz formulae $b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k$ gde je $k = 1, 2, \dots, n-1$, imamo:

$$r = a_0 + c \cdot b_0$$

$$b_3 = a_4$$

$$b_3 = a_4 \rightarrow \boxed{b_3 = 2}$$

$$b_2 = a_3 + c \cdot b_3$$

$$b_2 = a_3 + c \cdot b_3 \rightarrow b_2 = -1 + 1 \cdot 2 \rightarrow \boxed{b_2 = 1}$$

$$b_1 = a_2 + c \cdot b_2$$

pa je :

$$b_1 = a_2 + c \cdot b_2 \rightarrow b_1 = 3 + 1 \cdot 1 \rightarrow \boxed{b_1 = 4}$$

ubacimo u šemu:

$$b_0 = a_1 + c \cdot b_1$$

$$b_0 = a_1 + c \cdot b_1 \rightarrow b_0 = -4 + 1 \cdot 4 \rightarrow \boxed{b_0 = 0}$$

$$r = a_0 + c \cdot b_0$$

$$r = a_0 + c \cdot b_0 \rightarrow r = 1 + 1 \cdot 0 \rightarrow \boxed{r = 1}$$

	2	-1	3	-4	1
1	2	1	4	0	1

Dobili smo polinom trećeg stepena čiji su koeficijenti $b_3 = 2$ uz x^3 ; $b_2 = 1$ uz x^2 ; $b_1 = 4$ uz x , a slobodan član je 0.

Imamo dakle: $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(2x^3 + 1x^2 + 4x) + 1$ ili zapisano na drugi način:

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x-1} = 2x^3 + 1x^2 + 4x + \frac{1}{x-1}$$

Primer 2.

Podeliti polinom $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ sa $x + 2$

Rešenje:

Ovde pazimo jer nema x^4 i x^2 , pa su ti koeficijenti nula!

$x + 2$ uporedjujemo sa $x - c$ pa je $c = -2$

Iz $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ je:

$$a_6 = 3$$

$$a_5 = -2$$

$$a_4 = 0$$

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = -4$$

$$a_0 = -1$$

	$a_6 = 3$	$a_5 = -2$	$a_4 = 0$	$a_3 = 1$	$a_2 = 0$	$a_1 = -4$	$a_0 = -1$
$c = -2$							

Preko formulica tražimo:

$$b_5 = a_6 \rightarrow \boxed{b_5 = 3}$$

$$b_4 = a_5 + c \cdot b_5 \rightarrow b_4 = -2 + (-2) \cdot 3 \rightarrow \boxed{b_4 = -8}$$

$$b_3 = a_4 + c \cdot b_4 \rightarrow b_3 = 0 + (-2) \cdot (-8) \rightarrow \boxed{b_3 = 16}$$

$$b_2 = a_3 + c \cdot b_3 \rightarrow b_2 = 1 + (-2) \cdot 16 \rightarrow \boxed{b_2 = -31}$$

$$b_1 = a_2 + c \cdot b_2 \rightarrow b_1 = 0 + (-2) \cdot (-31) \rightarrow \boxed{b_1 = 62}$$

$$b_0 = a_1 + c \cdot b_1 \rightarrow b_0 = -4 + (-2) \cdot 62 \rightarrow \boxed{b_0 = -128}$$

$$r = a_0 + c \cdot b_0 \rightarrow r = -1 + (-2) \cdot (-128) \rightarrow \boxed{r = 255}$$

	$a_6 = 3$	$a_5 = -2$	$a_4 = 0$	$a_3 = 1$	$a_2 = 0$	$a_1 = -4$	$a_0 = -1$
$c = -2$	$b_5 = 3$	$b_4 = -8$	$b_3 = 16$	$b_2 = -31$	$b_1 = 62$	$b_0 = -128$	$r = 255$

Imamo da je:

$$3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1 = (x + 2)(3x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 31x^2 + 62x - 128) + 255$$

Ili u drugom zapisu :

$$\frac{3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1}{x + 2} = 3x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 31x^2 + 62x - 128 + \frac{255}{x + 2}$$