EKSTREMUMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH (I deo)

Kod ovakvih zadataka najčešće se zadaje funkcija $f(x, y)$.

Prvi posao nam je da nađemo parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Zatim rešavamo sistem jednačina $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Rešenja ovog sistema (može da bude jedno, ali i više njih) nam daju **stacionarne tačke** (x_0, y_0), (x_1, y_1), ...itd.

Dalje tražimo: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Oformimo $D = A \cdot C - B^2$

Za svaku stacionarnu tačku radimo isto:

Najpre vrednosti stacionarne tačke zamenimo u D. Dobijena vrednost mora da je veća od nule $\boxed{D > 0}$, ako se desi da nije , onda ta tačka nije tačka ekstremuma.

Dalje ispitujemo da li je maksimum ili minimum:

i) Ako je $\boxed{D > 0}$ i $A < 0$ $(C < 0)$ onda je stacionarna tačka **maksimum**

ii) Ako je $\boxed{D > 0}$ i $A > 0$ $(C > 0)$ onda je stacionarna tačka **minimum**

iii) Ako je $D = 0$ slučaj je **neodređen**

iv) Ako je $D < 0$ **nema ekstremuma**

Ako se desi da je $D = 0$, to jest da je slučaj neodređen, onda moramo ići na širu definiciju ekstremuma, to jest tražimo diferencijal drugog reda $d^2 f$ i

a) Ako je $d^2 f > 0$ funkcija ima minimum

b) Ako je $d^2 f < 0$ funkcija ima maksimum primer 1.

Naći ekstremume funkcije $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

Rešenje:

Najpre tražimo prve parcijalne izvode:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

Oformimo sistem jednačina $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

$$3x^2 - 6y = 0...../:3$$
$$\underline{24y^2 - 6x = 0}....../:6$$
$$x^2 - 2y = 0 \to y = \frac{x^2}{2} \quad \text{zamenimo u} \quad 4y^2 - x = 0$$
$$\underline{4y^2 - x = 0}$$
$$4(\frac{x^2}{2})^2 - x = 0 \to \cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}} - x = 0 \to x^4 - x = 0 \to x(x^3 - 1) = 0$$
$$x = 0 \lor x = 1$$
$$Za \ \ x = 0 \to y = \frac{x^2}{2} \to y = 0 \to \boxed{M_1(0,0)}$$
$$Za \ \ x = 1 \to y = \frac{x^2}{2} \to y = \frac{1}{2} \to \boxed{M_1(1,\frac{1}{2})}$$

Dobili smo dve stacionarne tačke : $M_1(0,0)$ i $M_1(1,\frac{1}{2})$.

Dalje tražimo $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i pravimo $D = A \cdot C - B^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$
$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6y) = 6x$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(24y^2 - 6x) = -6$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(24y^2 - 6x) = 48y$$

pa je:

$$D = A \cdot C - B^2$$
$$D = (6x)(48y) - (-6)^2$$
$$\boxed{D = 288xy - 36}$$

Uzimamo prvu stacionarnu tačku i ispitujemo:

$M_1(0,0)$

$$D = 288xy - 36 \rightarrow D(0,0) = 288 \cdot 0 \cdot 0 - 36 = -36 \rightarrow D(0,0) < 0$$

Dakle, pokazali smo da ova tačka nije ekstrem!

Ispitujemo drugu stacionarnu tačku:

$M_1(1, \frac{1}{2})$

$$D = 288xy - 36 \rightarrow D(1, \frac{1}{2}) = 288 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 36 = 144 - 36 = 108 \rightarrow D(1, \frac{1}{2}) > 0$$

Ova tačka jeste ekstrem, još da ispitamo da li je max ili min.

$$A = 6x \rightarrow A(1, \frac{1}{2}) = 6 \cdot 1 = 6 \rightarrow A(1, \frac{1}{2}) > 0$$

Zaključujemo da je ova tačka minimum!

Vratimo ovu vrednost u početnu funkciju da izračunamo tu minimalnu vrednost:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$
$$z_{\min}(1, \frac{1}{2}) = 1^3 + 8(\frac{1}{2})^3 - 6 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2}) + 5 = 1 + 1 - 3 + 5 = 4$$
$$\boxed{z_{\min}(1, \frac{1}{2}) = 4}$$

$\boxed{\text{primer 2.}}$

Ispitati ekstremume funkcije: $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

Rešenje:

$$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1$$

$$\sqrt{y} - 2x + 6 = 0$$
$$\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0$$

Iz $\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0 \rightarrow x = 2\sqrt{y}$ pa ovo zamenimo u $\sqrt{y} - 2x + 6 = 0$

$$\sqrt{y} - 2 \cdot 2\sqrt{y} + 6 = 0$$
$$-3\sqrt{y} + 6 = 0 \rightarrow \sqrt{y} = 2 \rightarrow \boxed{y = 4}$$
$$x = 2\sqrt{y} \rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{4} \rightarrow \boxed{x = 4}$$

$\boxed{M(4,4)}$ je stacionarna tačka (jedina)

Dalje tražimo $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i oformimo $D = A \cdot C - B^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1$$
$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{y} - 2x + 6) = -2$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 1) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} - 1) = -\frac{x}{4y\sqrt{y}}$$

$$D = A \cdot C - B^2$$

Pa je : $D = (-2)(-\frac{x}{4y\sqrt{y}}) - (\frac{1}{2\sqrt{y}})^2$

$$\boxed{D = \frac{x}{2y\sqrt{y}} - \frac{1}{4y}}$$

Vrednost stacionarne tačke $M(4,4)$ zamenimo u D :

$$D = \frac{x}{2y\sqrt{y}} - \frac{1}{4y}$$

$$D(4,4) = \frac{4}{2\cdot 4\sqrt{4}} - \frac{1}{4\cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$D(4,4) = \frac{3}{16} > 0$$

Zaključujemo da je naša tačka $M(4,4)$ ekstrem, zamenimo je u A da odredimo da li je max ili min.

Kako je A = -2 nemamo šta da zamenjujemo , već odmah zaključujemo A = -2 < 0 , tačka $M(4,4)$ je maksimum!

Vratimo se u početnu funkciju da nađemo tu maksimalnu vrednost:

$$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

$$z(4,4) = 4\sqrt{4} - 4^2 - 4 + 6\cdot 4 + 3$$

$$\boxed{z(4,4) = 15}$$

$\boxed{\text{primer 3.}}$

Ispitati ekstremume funkcije: $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$

<u>Rešenje:</u>

$$z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\cdot\frac{1}{\frac{x}{6}}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{12 - x - y}(-1) \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{12 - x - y}(-1) \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}}$$

Izjednačimo prve parcijalne izvode sa nulom i rešavamo sistem jednačina:

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{12-x-y}=0$$
$$\frac{2}{y}-\frac{1}{12-x-y}=0$$

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{12-x-y}\rightarrow 4x+3y=36$$
$$\frac{2}{y}=\frac{1}{12-x-y}\rightarrow 2x+3y=24$$

$$4x+3y=36$$
$$2x+3y=24$$

$$x=6$$
$$y=4$$
$$\boxed{M(6,4)}$$

Dobili smo stacionarnu tačku.

Tražimo $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i oformimo $D=A\cdot C-B^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{12-x-y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{1}{12-x-y}$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{(12-x-y)^2}$$
$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(12-x-y)^2}$$
$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{y^2}-\frac{1}{(12-x-y)^2}$$

$$D=A\cdot C-B^2$$
$$D=(-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{(12-x-y)^2})\cdot(-\frac{2}{y^2}-\frac{1}{(12-x-y)^2})-\frac{1}{(12-x-y)^4}$$

Zamenimo vrednost stacionarne tačke u D da vidimo da li je pna potencijalni ekstrem:

$$M(6,4) \rightarrow D = (-\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}) \cdot (-\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}) - \frac{1}{(12-x-y)^4}$$

$$D(6,4) = (-\frac{3}{6^2} - \frac{1}{(12-6-4)^2}) \cdot (-\frac{2}{4^2} - \frac{1}{(12-6-4)^2}) - \frac{1}{(12-6-4)^4}$$

$$D(6,4) = \frac{1}{8} > 0$$

Sad menjamo u A da odredimo da li je max ili min:

$$M(6,4) \rightarrow A = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12-x-y)^2}$$

$$A(6,4) = -\frac{3}{6^2} - \frac{1}{(12-6-4)^2} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} < 0$$

Naša tačka M(6,4) je dakle maksimum!

Vrednost funkcije u njoj je:

$$z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12-x-y)$$

$$z(6,4) = 3\ln\frac{6}{6} + 2\ln 4 + \ln(12-6-4)$$

$$z(6,4) = 3\ln 1 + 2\ln 2^2 + \ln 2 = 3\cdot 0 + 2\cdot 2\ln 2 + \ln 2$$

$$\boxed{z(6,4) = 5\ln 2}$$