

DVOSTRUKI INTEGRALI

1. DIREKTNO IZRAČUNAVANJE

Ako je oblast D određena nejednakostima :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{array} \right. \quad \text{onda je:} \quad \iint_D z(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y) dy$$

Ako je oblast D određena nejednakostima:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{array} \right. \quad \text{onda je :} \quad \iint_D z(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x, y) dx$$

2. OPŠTE KOORDINATE

Ako se sa $x=x(u,v)$ i $y=y(u,v)$, gde su ovo neprekidne i diferencijabilne funkcije , realizuje jednoznačno preslikavanje ograničene i zatvorene oblasti D u ravni xOy na oblast D' u ravni uOv i ako je:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$$

Onda važi formula:

$$\iint_D z(x, y) dx dy = \iint_{D'} z[x(u, v), y(u, v)] |J| du dv$$

3. POLARNE KOORDINATE

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right. \quad \text{onda je :} \quad \iint_D z(x, y) dx dy = \iint_{D'} z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) |J| dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

$$|J| = r$$

4. ELIPTIČKE KOORDINATE

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a r \cos \varphi \\ y = b r \sin \varphi \quad \text{onda je: } \iint_D z(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r z(ar \cos \varphi, br \sin \varphi) abr dr \\ |J| = abr \end{array} \right.$$

PRIMENA DVOSTRUKIH INTEGRALA

i) Izračunavanje površine površi

Ako je površ zadata jednačinom $z = z(x, y)$ i ako obeležimo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ onda je:

$$P = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

Ako je površ zadata parametarskim jednačinama $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$ onda je:

$$P = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \quad \text{gde je:}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Izračunavanje zapremine

Zapremina cilindra, koji odozgo ograničava neprekidna površ definisana jednačinom $z=z(x,y)$, odozdo ravan $z=0$, a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D , data je formulom:

$$V = \iint_D z(x, y) dx dy$$