

1. Reši diferencijalnu jednačinu:  $x(1+y^2) = y y'$

Rešenje:

$$x(1+y^2) = y y'$$

$$x(1+y^2) = y \frac{dy}{dx} \quad \text{sve pomnožimo sa } dx \text{ (} dx \neq 0 \text{) i podelimo sa } 1+y^2$$

$$x dx = \frac{y dy}{1+y^2} \quad \text{znači ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive!}$$

$$\int x dx = \int \frac{y dy}{1+y^2} \quad \text{integral na levoj strani je tablični a za ovaj na desnoj strani uzimamo smenu.}$$

$$\frac{x^2}{2} = \int \frac{y dy}{1+y^2} = \left| \begin{array}{l} 1+y^2 = t \\ 2y dy = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln|1+y^2| + c$$

Dakle:

$$\boxed{\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \ln|1+y^2| + c} \quad \text{je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine.}$$

2. Reši diferencijalnu jednačinu:  $x^2 = 3y^2 y'$

Rešenje:

$$x^2 = 3y^2 y'$$

$$x^2 = 3y^2 \frac{dy}{dx} \quad \text{sve pomnožimo sa } dx \text{ (} dx \neq 0 \text{)}$$

$$x^2 dx = 3y^2 dy \quad \text{diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive!}$$

$$\int x^2 dx = \int 3y^2 dy \quad \text{oba su tablična}$$

$$\frac{x^3}{3} = 3 \frac{y^3}{3} + c$$

$$\boxed{\frac{x^3}{3} = y^3 + c} \quad \text{ovo je opšte rešenje}$$

3. Reši diferencijalnu jednačinu:  $y' = \frac{2x+y}{2x}$

Rešenje:

$$y' = \frac{2x+y}{2x}$$

$$y' = \frac{x(2 + \frac{y}{x})}{2x}$$

$$y' = \frac{2 + \frac{y}{x}}{2} \quad \text{ovo je homogena d.j.}$$

Uzimamo smenu :  $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{2 + z}{2}$$

$$z'x = \frac{2 + z}{2} - z$$

$$z'x = \frac{2 + z - 2z}{2}$$

$$z'x = \frac{2 - z}{2} \quad \text{ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive } z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{2 - z}{2}$$

$$\frac{dz}{2 - z} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{2 - z} = \int \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|2 - z| = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln c \quad \text{trik je da kada su sva rešenja po ln da se doda lnc umesto c}$$

$$\ln|2 - z|^{-1} = \ln|x|^{\frac{1}{2}} + \ln c$$

$$\ln|2 - z|^{-1} = \ln|x|^{\frac{1}{2}} c \quad \text{antilogaritmujemo}$$

$$|2 - z|^{-1} = |x|^{\frac{1}{2}} c$$

$$\frac{1}{2 - z} = \sqrt{x} c \quad \text{vratimo smenu } \frac{y}{x} = z$$

$$\frac{1}{2 - \frac{y}{x}} = \sqrt{x} c \quad \text{ovo je opšte rešenje, ako zahteva vaš profesor odavde izrazite y}$$

4. Reši diferencijalnu jednačinu:  $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$

Rešenje:  $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \quad \text{gore izvlačimo } x^3$$

$$y' = \frac{x^3(1 + \frac{y^3}{x^3})}{xy^2}$$

$$y' = \frac{x^2(1 + \frac{y^3}{x^3})}{y^2} \text{ spustimo } x^2 \text{ dole ispod } y^2$$

$$y' = \frac{(1 + \frac{y^3}{x^3})}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$y' = \frac{1 + (\frac{y}{x})^3}{(\frac{y}{x})^2} \text{ jasno je da je ovo homogena d.j.}$$

Uzimamo smenu :  $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{1 + z^3}{z^2}$$

$$z'x = \frac{1 + z^3}{z^2} - z$$

$$z'x = \frac{1 + z^3 - z^3}{z^2}$$

$$z'x = \frac{1}{z^2} \quad \text{razdvaja promenljive } z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{1}{z^2}$$

$$z^2 dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z^2 dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + c \quad \text{vratimo smenu } \frac{y}{x} = z \quad \text{pa je}$$

$\frac{(\frac{y}{x})^3}{3} = \ln x  + c$	opšte rešenje
--	---------------

5. Reši diferencijalnu jednačinu:  $xy' - x^2 + 2y = 0$

Rešenje:  $xy' - x^2 + 2y = 0$

$$xy' + 2y = x^2 \quad \text{sve podelimo sa } x \quad (x \neq 0)$$

$$y' + \frac{2}{x}y = x \quad \text{ovo je linearna d.j. } p(x) = \frac{2}{x} \quad \text{i} \quad q(x) = x$$

$$\text{Opšte rešenje ove d.j. dato je formulom} \quad y = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)$$

Nađimo prvo rešenje integrala  $\int p(x)dx$

$$\int p(x)dx = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| = \ln|x|^2$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int x e^{\ln x^2} dx = \int x x^2 dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx) = e^{-\ln x^2} [c + \frac{x^4}{4}] = \frac{1}{x^2} [c + \frac{x^4}{4}] \quad \text{dakle:}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2} [c + \frac{x^4}{4}]} \quad \text{je opšte rešenje.}$$

**6. Reši diferencijalnu jednačinu:**  $y' - 2xy = (x - x^3)e^{x^2}$

**Rešenje:**  $y' - 2xy = (x - x^3)e^{x^2}$  ovo je linearna d.j.  $p(x) = -2x$  i  $q(x) = (x - x^3)e^{x^2}$

Nađimo prvo rešenje integrala  $\int p(x)dx$

$$\int p(x)dx = \int (-2x)dx = -2 \int x dx = -2 \frac{x^2}{2} = -x^2$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int (x - x^3)e^{x^2} e^{-x^2} dx = \int (x - x^3) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

Sada je konačno rešenje :

$$y = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx) = e^{x^2} [c + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]$$

$$\boxed{y = e^{x^2} [c + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]}$$

7. Reši diferencijalnu jednačinu:  $y' \cos^2 x = \operatorname{tg} x - y$  i nađi ono partikularno rešenje koje zadovoljava uslove:  $x=0$  i  $y=0$

**Rešenje:** Najpre ćemo rešiti datu diferencijalnu jednačinu a zatim naći vrednost konstante za date uslove.

$$y' \cos^2 x = \operatorname{tg} x - y$$

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x \quad \text{sve podelimo sa } \cos^2 x$$

$$y' + \frac{1}{\cos^2 x} y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \quad \text{ovo je linearna d.j.}$$

$$p(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \dots \dots \dots q(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

Nađimo, kao i obično, prvo rešavamo integral  $\int p(x) dx$

$$\int p(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \int t e^t dt = \text{parcija ln a.....integracija} =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = u \quad e^t dt = dv \\ dt = du \quad e^t = v \end{array} \right| = t e^t - e^t = \operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x}$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} (c + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx) = e^{-\operatorname{tg} x} [c + \operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x}]$$

$$y = e^{-\operatorname{tg} x} c + \operatorname{tg} x - 1 \quad \text{opšte rešenje}$$

Menjamo ovde  $x=0$  i  $y=0$

$$0 = e^{-\operatorname{tg} 0} c + \operatorname{tg} 0 - 1$$

$$0 = c - 1$$

$$c = 1 \quad \text{sad ovo vratimo u opšte rešenje } y = e^{-\operatorname{tg} x} 1 + \operatorname{tg} x - 1 = e^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1$$

8. Reši diferencijalnu jednačinu:  $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$

**Rešenje:**  $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$

$$xy' - 4y = 2x^2 \sqrt{y}$$

$$xy' - 4y = 2x^2 y^{\frac{1}{2}}$$

$y' - \frac{4}{x}y = 2x y^{\frac{1}{2}}$  ovo je Bernulijeva d.j. za koju je  $n = \frac{1}{2}$  pa je smena:  $y^{1-n} = u$

$$y^{\frac{1}{2}} = u$$

$$\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' = u'$$

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} = 2u'$$

$y' - \frac{4}{x}y = 2x y^{\frac{1}{2}}$  sve podelimo sa  $y^{\frac{1}{2}}$

Vratimo se u jednačinu:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{x} \frac{y}{y^{\frac{1}{2}}} = 2x$$

$2u' - \frac{4}{x}u = 2x$  sve podelimo sa 2

$u' - \frac{2}{x}u = x$  ovo je linearna d.j. po u

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)$$

$$\int p(x)dx = \int \left(-\frac{2}{x}\right)dx = -2 \ln|x| = \ln|x|^{-2} = \ln \frac{1}{x^2}$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int x e^{\ln x^{-2}} dx = \int x \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx) = e^{\ln x^{-2}} [c + \ln|x|]$$

$u(x) = x^{-2} [c + \ln|x|]$  rešenje linearne po u, vratimo smenu:  $\sqrt{y} = u$

$\sqrt{y} = x^2 [c + \ln|x|]$  kvadriramo

$y = x^4 [c + \ln x ]^2$ opšte rešenje
--

9. **Odredi ono rešenje diferencijalne jednačine  $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$  koje zadovoljava početni uslov  $y(0)=1$**

**Rešenje:** Najpre ćemo rešiti datu diferencijalnu jednačinu a zatim naći vrednost konstante za dati uslov.

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0 \text{ podelimo sve sa } dx$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2yy' = 0 \text{ podelimo sve sa } 2y$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2y} + \frac{1}{2}y + y' = 0$$

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{x^2 + 2x}{2}y^{-1} \text{ ovo je Bernulijeva d.j. za koju je } n = -1$$

$$y^{1-n} = u$$

$$\text{smena je : } y^2 = u$$

$$2yy' = u'$$

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{x^2 + 2x}{2}y^{-1} \text{ sve pomnozimo sa } 2y$$

$$2yy' + y^2 = x^2 + 2x$$

$$u' + u = x^2 + 2x \text{ ovo je linearna po } u$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)$$

$$\int p(x)dx = \int 1dx = x$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int (x^2 + x)e^x dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + x = u \quad e^x dx = dv \\ (2x+1)dx = du \quad e^x = v \end{array} \right| =$$

$$e^x(x^2 + x) - \int e^x(2x+1)dx = \left| \begin{array}{l} 2x+1 = u \quad e^x dx = dv \\ 2dx = du \quad e^x = v \end{array} \right| =$$

$$e^x(x^2 + x) - [e^x(2x+1) - \int 2e^x dx]$$

$$e^x(x^2 + x) - e^x(2x+1) + 2e^x =$$

$$e^x(x^2 + x - 2x - 1 + 2) =$$

$$e^x(x^2 - x + 1)$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)$$

$$u(x) = e^{-x}[c + e^x(x^2 - x + 1)] = e^{-x}c + x^2 - x + 1$$

$$u(x) = e^{-x}c + x^2 - x + 1 \text{ vratimo smenu}$$

$y^2 = e^{-x}c + x^2 - x + 1$  i evo ga opšte rešenje

 . Stavimo  $x = 0$  i  $y = 1$

$$1 = c + 1, \text{ pa je odavde } c = 0 \text{ i partikularno rešenje je :}$$

$$y^2 = x^2 - x + 1$$

**10. Reši diferencijalnu jednačinu:**  $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$

**Rešenje:** Proverimo da li je ovo jednačina sa totalnim diferencijalom:

$$P(x,y) = 2xy + 3y^2$$

$$Q(x,y) = x^2 + 6xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 6y \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 6y$$

Pošto je  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , ovo jeste d.j. sa totalnim diferencijalom.

Rešavamo je preko formule :  $C = \int P(x, y)dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx]dy$

$$\int P(x, y)dx = \int (2xy + 3y^2)dx = 2y \frac{x^2}{2} + 3y^2 x = yx^2 + 3y^2 x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(yx^2 + 3y^2x) = x^2 + 6xy$$

$$c = yx^2 + 3y^2x + \int [x^2 + 6xy - 3y^2 - x^2 - 6xy]dy$$

$$c = yx^2 + 3y^2x + \int [-3y^2]dy$$

$$c = yx^2 + 3y^2x - y^3 \text{ je opšte rešenje}$$

**11. Reši diferencijalnu jednačinu:**  $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$  **znajući da je njen integracioni faktor oblika**  $\lambda = \lambda(x + y^2)$ . **Odrediti zatim onu integralnu krivu koja prolazi kroz tačku M(-2,1)**

**Rešenje:**

Ako je  $\mu(x,y) = \mu(w(x,y))$  (pogledaj teoretski deo) onda je :

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P \frac{\partial w}{\partial y} - Q \frac{\partial w}{\partial x}} dw \quad \text{upotrebljavamo ovu formulu da nadjemo integracioni faktor}$$

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0 \text{ odavde je}$$

$$P(x,y) = 3x + 2y + y^2 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 2y \quad w = x + y^2 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x,y) = x + 4xy + 5y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 4y$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1 + 4y - 2 - 2y}{(3x + 2y + y^2)2y - (x + 4xy + 5y^2)} dw$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{2y - 1}{2xy - x + 2y^3 - y^2} dw$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{2y - 1}{x(2y - 1) + y^2(2y - 1)} dw$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{2y-1}{(2y-1)(x+y^2)} dw$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{(x+y^2)} dw \quad w=x+y^2$$

$\ln \mu = \ln(x+y^2) + \ln c$ , pa je  $\ln \mu = \ln(x+y^2)c$  to jest za  $c=1$   $\mu = x+y^2$

Dakle, traženi integracioni faktor je  $\mu = x+y^2$  kojim množimo celu jednačinu

$$(x+y^2)(3x+2y+y^2)dx + (x+y^2)(x+4xy+5y^2)dy = 0$$

$$(3x^2+2xy+xy^2+3xy^2+2y^3+y^4)dx + (x^2+4x^2y+5xy^2+xy^2+4xy^3+5y^4)dy = 0$$

$$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx + (x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x+8xy+6y^2+4y^3 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x+8xy+6y^2+4y^3$$

$$C = \int P(x,y)dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx] dy$$

$$\int P(x,y)dx = \int (3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx = 3\frac{x^3}{3} + 2y\frac{x^2}{2} + 4y^2\frac{x^2}{2} + 2y^3x + y^4x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (3\frac{x^3}{3} + 2y\frac{x^2}{2} + 4y^2\frac{x^2}{2} + 2y^3x + y^4x) = x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3$$

$$C = x^3 + x^2y + 2y^2x^2 + 2y^3x + y^4x + \int [(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4) - (x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3)] dy$$

$$C = x^3 + x^2y + 2y^2x^2 + 2y^3x + y^4x + \int 5y^4 dy$$

$C = x^3 + x^2y + 2y^2x^2 + 2y^3x + y^4x + y^5$  ovo je opšte rešenje

Integralna kriva koja prolazi kroz tačku  $M(-2,1)$  je :

$$C = -8 + 4 + 4 - 4 - 2 + 1 = -5 \text{ pa je } x^3 + x^2y + 2y^2x^2 + 2y^3x + y^4x + y^5 = -5$$

**12. Reši diferencijalnu jednačinu:**  $y' = \frac{3y^3 - 2xy^2}{7 - 3xy^2}$  ako se zna da je integracioni faktor u funkciji od  $y$

**Rešenje:**

$$y' = \frac{3y^3 - 2xy^2}{7 - 3xy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^3 - 2xy^2}{7 - 3xy^2}$$

$$(7 - 3xy^2)dy = (3y^3 - 2xy^2)dx$$

$$(7 - 3xy^2)dy - (3y^3 - 2xy^2)dx = 0$$

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$$

Kako je integracioni faktor u funkciji od y to ćemo koristiti formulu:

$$\mu(x,y) = \mu(y)$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y^2(2x-3y)} (-3y^2 - 4xy + 9y^2) dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y^2(2x-3y)} (-4xy + 6y^2) dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y^2(2x-3y)} 2y(3y-2x) dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{-2}{y} dy$$

$$\ln|\mu| = -2\ln|y| + \ln c \quad \ln|\mu| = \ln|y|^{-2} + \ln c \text{ za } c=1 \text{ je}$$

$$\mu = \frac{1}{y^2} \text{ traženi integracioni faktor}$$

$$\frac{1}{y^2}(2xy^2 - 3y^3)dx + \frac{1}{y^2}(7 - 3xy^2)dy = 0$$

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3$$

$$\int P(x, y)dx = \int (2x - 3y)dx = x^2 - 3yx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3yx) = -3x$$

$$C = \int P(x, y)dx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx\right]dy$$

$$C = x^2 - 3xy + \int \left(\frac{7}{y^2} - 3x + 3x\right)dy$$

$$C = x^2 - 3xy + \int \left(\frac{7}{y^2}\right)dy$$

$$C = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} \quad \text{ovo je opšte rešenje}$$

### 13. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y' = \ln(xy' - y)$

**Rešenje:** Uvodimo smenu  $y' = p$        $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$

$$y' = \ln(xy' - y)$$

$$p = \ln(xp - y) \quad \text{odavde izrazimo } y$$

$$e^p = xp - y$$

$$y = xp - e^p \quad \text{diferenciramo}$$

$$dy = \frac{\partial(xp - e^p)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xp - e^p)}{\partial p} dp$$

**www.matematiranje.com**

$$dy = p dx + (x - e^p) dp$$

$$p dx = p dx + (x - e^p) dp$$

$$(x - e^p) dp = 0$$

$$\int (x - e^p) dp = 0$$

$$xp - e^p + c = 0$$

$$x = \frac{e^p - c}{p}$$

$$y = xp - e^p$$

$$y = \frac{e^p - c}{p} p - e^p$$

$$y = -c$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{e^p - c}{p} \\ y = -c \end{array} \right\} \text{opšte rešenje u parametarskom obliku}$$

**14. Rešiti diferencijalnu jednačinu:**  $y' + y = xy^2$

**Rešenje:**

I ovde ćemo kao i u prethodnom primeru upotrebiti metod parametra  $y' = p$   $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$

$$y' + y = xy^2$$

$$p + y = xp^2$$

$$y = xp^2 - p$$

diferenciramo

$$dy = p^2 dx + (2px - 1) dp$$

$$p dx = p^2 dx + (2px - 1) dp$$

$$(p - p^2) dx = (2px - 1) dp \quad \text{sve podelimo sa } dp$$

$$(p - p^2) \frac{dx}{dp} = (2px - 1)$$

$$(p - p^2) x' = (2px - 1)$$

$$(p - p^2)x' - 2px = -1 \quad \text{pomnožimo sa } -1$$

$$p(p - 1)x' + 2px = 1 \quad \text{sve podelimo sa } p(p - 1)$$

$$x' + \frac{2p}{p(p-1)}x = \frac{1}{p(p-1)}$$

$$x' + \frac{2}{(p-1)}x = \frac{1}{p(p-1)} \quad \text{ovo je linearna d.j. po } x, x=x(p)$$

Rešavamo je upotrebom poznate formule:

$$x(p) = e^{-\int p(p)dp} \left( c + \int q(p)e^{\int p(x)dp} dp \right) \quad \text{i dobijemo:}$$

$$x(p) = \frac{1}{(p-1)^2} [c + p - \ln|p|] \quad \text{ovo rešenje zamenimo u } y = xp^2 - p$$

$$y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} [c + p - \ln|p|] p^2 - p$$

**I ovo je opšte rešenje u parametarskom obliku.**

**14. Pokazati da diferencijalna jednačina  $(x^2 + x)y' + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0$  ima partikularno rešenje  $y_1 = a$  gde je  $a$  konstanta koju treba odrediti. Naći njeno opšte rešenje.**

**Rešenje:**

$$(x^2 + x)y' + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0 \quad \text{ima jedno rešenje } y_1 = a \Rightarrow y_1' = 0 \quad \text{zamenimo u d.j.}$$

$$0 + a^2 + (1 - 2x)a - 2x = 0$$

$$a^2 + a - 2ax - 2x = 0$$

$$x(-2a - 2) + (a^2 + a) = 0$$

$$\text{Oдавde mora biti : } -2a - 2 = 0 \quad \text{i} \quad a^2 + a = 0$$

$$-2a = 2 \quad a(a + 1) = 0$$

$$a = -1 \quad a = 0 \quad \text{ili } a = -1$$

Dakle, zaključujemo da je  $a = -1$  pa je jedno rešenje  $y_1 = -1$

Ovo je Rikatijska diferencijalna jednačina, oblika je  $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

Ako je poznato jedno partikularno rešenje  $y_1(x)$ , onda uzimamo smenu  $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$  i posle sredjivanja dobijamo linearnu d.j.

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \quad \text{pa je} \quad y = -1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$(x^2 + x)y' + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0$$

$$(x^2 + x)\left(-\frac{z'}{z^2}\right) + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 + (1 - 2x)\left(\frac{1}{z} - 1\right) - 2x = 0 \quad \text{sredimo...}$$

$$z' + \frac{2x+1}{x^2+x}z = \frac{1}{x^2+x} \quad \text{ovo je linearna d.j. po } z$$

$$z(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right)$$

$$\int p(x)dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + x = t \\ (2x+1)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|x^2 + x|$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^2+x} e^{\ln|x^2+x|} dx = x \quad \text{pa je}$$

$$z(x) = \frac{c+x}{x^2+x} \quad \text{vratimo smenu}$$

$$\frac{1}{y+1} = \frac{c+x}{x^2+x} \quad \text{a odavde je}$$

$$y = \frac{x^2 - c}{x + c} \quad \text{opšte rešenje}$$

15. Data je diferencijalna jednačina  $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$

Odrediti realne brojeve  $a$  i  $b$  tako da je  $y = ax + b$  partikularno rešenje date jednačine a zatim naći njeno opšte rešenje.

**Rešenje:**

$y = ax + b \Rightarrow y' = a$  zamenimo u datu d.j.

$$xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$$

$$xa = (ax + b)^2 - (2x+1)(ax + b) + x^2 + 2x$$

$$0 = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax^2 - 2bx - ax - b + x^2 + 2x - ax$$

“spakujemo” uz  $x^2$ , pa uz  $x$ , pa slobodne članove

$$x^2(a^2 - 2a + 1) + x(2ab - 2b - 2a + 2) + b^2 - b = 0 \quad \text{odavde mora biti:}$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \quad \text{i} \quad 2ab - 2b - 2a + 2 = 0 \quad \text{i} \quad b^2 - b = 0$$

$$(a-1)^2 = 0 \quad (2b-2)(a-1) = 0 \quad b(b-1) = 0$$

$$a = 1 \quad a = 1 \text{ ili } b = 1 \quad b = 0 \text{ ili } b = 1$$

Na ovaj način smo dobili dva moguća partikularna rešenja:  $y = x$  i  $y = x+1$

Mi ćemo naravno odabrati lakše, odnosno  $y = x$  za drugi deo zadatka.

$xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$  ovo je Rikatiјеva diferencijalna jednačina, smena je:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \text{ pa je } y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2} \text{ zamenimo u d.j.}$$

$$xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$$

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 2x \quad \text{sredimo....}$$

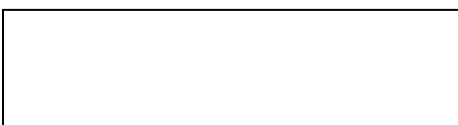
$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x} \quad \text{ovo je linearna po } z$$

$$z(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right) \text{ sredimo....}$$

$$z(x) = xc+1 \quad \text{vratimo smenu } y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{z} = y - x \Rightarrow z = \frac{1}{y-x}$$

$$\frac{1}{y-x} = xc+1$$

$$y-x = \frac{1}{xc+1}$$



$$y = x + \frac{1}{xc+1} \text{ je opšte rešenje}$$

---

**16. Rešiti diferencijalnu jednačinu:**  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$

**Rešenje:**

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1 \quad \text{sve podelimo sa } x^2$$

$$y' = y^2 + \frac{1}{x} y + \frac{1}{x^2} \quad \text{ovo je Rikatiјеva diferencijalna jednačina} \quad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Uvodimo smenu  $z=yx$  gde je  $z=z(x)$  (pogledaj teorijske napomene...)

$$z = yx \Rightarrow z' = y'x + y \Rightarrow y' = \frac{z'-y}{x}$$

$$y' = y^2 + \frac{1}{x} y + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{z'-y}{x} = \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} \frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{sve pomnozimo sa } x^2$$

$$x(z'-y) = z^2 + z + 1$$

$$xz'-xy = z^2 + z + 1 \quad \text{zamenimo da je } yx = z$$

$$xz'-z = z^2 + z + 1$$

$$xz' = z^2 + 2z + 1 \quad \text{ov je d.j koja razdvaja promenljive} \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

$$x \frac{dz}{dx} = z^2 + 2z + 1 \quad \text{pa je} \quad \frac{dz}{(z+1)^2} = \frac{dx}{x} \quad \text{integralimo...}$$

$$-\frac{1}{z+1} = \ln|x| + c \quad \text{vratimo smenu } z = xy \text{ i dobijamo opšte rešenje: } \boxed{-\frac{1}{yx+1} = \ln|x| + c}$$