

NEKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

DIFERENCIJALNA JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c \text{ opšti integral}$$

Ako postoji b tako da je $g(b)=0$ onda je $y=b$ rešenje

HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Rešava se uvođenjem smene $\frac{y}{x} = z$ odakle je $y' = z + xz'$. Posle smene svodi se na d.j. koja razdvaja promenljive.

Za $x=0$ ($y \neq 0$) ako postoji z_k iz \mathbb{R} tako da je $f(z_k) - z_k = 0$ onda $y = z_k x$ ($x > 0$) i $y = z_k x$ ($x < 0$) ($0,0$) je singularna tačka i izuzimamo je iz oblasti definisanosti

DIFERENCIJALNA JEDNAČINA OBLIKA $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

Rešava se uvođenjem smena $x = u + \alpha$ gde je $dx = du$ i $dy = dv$ i $v = v(u)$, tražimo konstante α i β

$$y = v + \beta$$

$$\text{Zamenom u jednačini dobijamo } \frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right)$$

Odavde mora biti $a\alpha + b\beta + c = 0$ i

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ onda } a = a_1k \text{ i } b = b_1k \text{ i ako je } \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ onda } \frac{dv}{du} = g\left(\frac{v}{u}\right) \text{ homogena d.j.}$$

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je $y' + p(x)y = q(x)$ i rešava se preko formule

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right)$$

BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je $y' + p(x)y = q(x)y^n$ rešava se smenom $z = y^{1-n}$ pa je $z' = (1-n)y^{-n}y'$

Celu jednačinu podelimo sa y^n i svedemo je na linearnu d. j.

LAGRANŽOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je $y = xA(y') + B(y')$

Uvodimo smenu $y' = p$, $\frac{dy}{dx} = p$, pa je $dy = pdx$

$y = xA(p) + B(p)$ diferenciramo i svedemo je na linearnu d.j.

$$\frac{dx}{dp} - \frac{A'(p)}{p - A(p)}x = \frac{B'(p)}{p - A(p)}$$

KLEROOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je $y = xy' + A(y')$ Uvodimo smenu $y' = p$, $\frac{dy}{dx} = p$, pa je $dy = pdx$

Posle diferenciranja dobijamo : $x + A'(p) = 0$ ili $dp = 0$

RIKATIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

1) Ako su P,Q,R konstante onda je ovo d.j. koja razdvaja promenljive

2) Ako je $y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}$ uvodimo smenu $z = yx$ gde je $z = z(x)$

3) Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$, onda uzimamo smenu $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ i posle sredjivanja dobijamo linearnu d.j.

METOD PARAMETRA

Neka nam je data funkcija u obliku $F(x,y,y')=0$

1) Ako je $y = f(x, y')$ onda uzimamo smenu $y' = p$, pa je $\frac{dy}{dx} = p$, pa je $dy = p dx$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dp \text{ zamenimo } dy \text{ i sredimo....}$$

2) Ako je $x = g(y, y')$ smena je isto $y' = p$, $dy = p dx$

$$dx = \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp \text{ zamenimo } dx = \frac{dy}{p} \text{ i rešavamo ...}$$

DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA TOTALNIM DIFERENCIJALOM

Oblika je $P(x,y) + Q(x,y) = 0$

Teorema: Da bi ova jednačina bila sa totalnim diferencijalom potrebno je i dovoljno da je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Rešavamo je preko formule : $C = \int P(x, y) dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx] dy$

INTEGRACIONI FAKTOR

Ako jednačina $P(x,y) + Q(x,y) = 0$ nije jednačina sa totalnim diferencijalom tražimo funkciju $\mu = \mu(x, y)$

tako da $\mu(x,y) P(x,y) + \mu(x,y) Q(x,y) = 0$ postane jednačina sa tot.dif.

1) Ako je $\mu(x,y) = \mu(x)$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx$$

2) Ako je $\mu(x,y) = \mu(y)$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy$$

3) Ako je $\mu(x,y) = \mu(w(x,y))$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P \frac{\partial w}{\partial y} - Q \frac{\partial w}{\partial x}} dw$$

Kad ne znamo oblik integracionog faktora probamo sa $w(x,y) = \lambda \ln|x| + \nu \ln|y|$