

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' = x + \sin x$

Rešenje:

$y'' = x + \sin x$ uzećemo smenu $y' = p$, odakle je $y'' = p'$

$p' = x + \sin x$

$\frac{dp}{dx} = x + \sin x$

$dp = (x + \sin x)dx$ ovo je d.j. koja razdvaja promenljive

$\int dp = \int (x + \sin x)dx$

$p = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$ dodali smo konstantu c_1 jer smo rešili jedan integral

$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$

$dy = (\frac{x^2}{2} - \cos x + c_1)dx$

$\int dy = \int (\frac{1}{2}x^2 - \cos x + c_1)dx$ svaki integral na desnoj strani rešavamo posebno

$y = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \sin x + c_1x + c_2$ dodamo konstantu c_2

$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1x + c_2$ ovo je opšti integral

2. Nađi opšti integral jednačine $y'' + 2yy'^3 = 0$

Rešenje:

$y'' + 2yy'^3 = 0$ uzećemo smenu $y' = p$, odakle je $y'' = p'p$, (pogledaj teorijske napomene)

$p'p + 2yp^3 = 0$ izvučemo p kao zajednički

$p(p' + 2yp^2) = 0$ odavde je $p = 0$ ili $p' + 2yp^2 = 0$

Za $p = 0$ odmah dobijamo rešenje $y' = 0$ to jest $y = c$ (konstanta)

$p' + 2yp^2 = 0$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = -2ydy \quad \text{d.j. koja razdvaja promenljive, integralimo}$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int -2ydy$$

$$-\frac{1}{p} = -2 \frac{y^2}{2} + c_1$$

$$\frac{1}{p} = y^2 - c_1$$

$$p = \frac{1}{y^2 - c_1} \quad \text{vratimo } y' = p$$

$$y' = \frac{1}{y^2 - c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - c_1}$$

$$(y^2 - c_1)dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - c_1y = x + c_2 \quad \text{opšti integral}$$

Dakle, rešenja su: $y = c$ i $\frac{y^3}{3} - c_1y = x + c_2$

3. Nađi opšti integral jednačina:

- a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- b) $y'' - 2y' + y = 0$
- c) $y'' - 2y' + 2y = 0$
- d) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$

Rešenje:

PAZI : U KARAKTERISTIČNOJ JEDNAČINI NEKO UZIMA KAO SMENU p , NEKO r , A NEKO λ .

VI RADITE ONAKO KAKO RADI VAŠ PROFESOR!(u suštini je sve jedno)

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ najpre rešimo karakterističnu jednačinu(pogledaj teoriju)

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 2, p_2 = 1$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

b) $y'' - 2y' + y = 0$ najpre rešimo karakterističnu jednačinu

$$p^2 - 2p + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$$p^2 - 2p + 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} \Rightarrow p_1 = 1 + i, p_2 = 1 - i$$

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \quad (\text{opet pogledaj teorijske napomene})$$

d) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$

$$p^4 - 5p^2 + 4 = 0 \quad (\text{ovo je bikvadratna jednačina}) \quad p^2 = t \text{ je smena}$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = 1 \quad \text{vratimo smenu } p^2 = t$$

$$p^2 = 4 \text{ ili } p^2 = 1, \text{ pa je } p_1 = 2, p_2 = -2, p_3 = 1, p_4 = -1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

4. Naći opšti integral jednačine : $y'' - y = x^2 + 1$

Rešenje:

Najpre nađemo rešenje odgovarajuće homogene jednačine!

$$y'' - y = 0$$

$$p^2 - 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{0 \pm 2}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = -1$$

$$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Dalje možemo birati dva puta: metodu neodređenih koeficijenata ili metodu varijacije konstanti.

Ovde bi bilo dobro da se podsetite teorije, da bi izabrali lakši put.....

Mi ćemo koristiti metodu neodređenih koeficijenata u ovom slučaju.

$Y = ax^2 + bx + c$ gde su a,b,c traženi koeficijenti

$$Y' = 2ax + b$$

$$Y'' = 2a$$

Ovo zamenimo u datu d.j. $y'' - y = x^2 + 1$

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

$$2a - ax^2 - bx - c = x^2 + 1$$

$$-ax^2 - bx + (2a - c) = x^2 + 1$$

Sad vršimo upoređivanje koeficijenata, uz x^2 , pa uz x, pa slobodne članove

$$\left. \begin{array}{l} -a = 1 \\ -b = 0 \\ 2a - c = 1 \end{array} \right\} \text{ Odavde je } a = -1, b = 0 \text{ i } c = -3, \text{ pa to zamenimo u } Y = ax^2 + bx + c \text{ i dobijemo:}$$

$Y = -x^2 - 3$ pa će konačno rešenje biti :

$$y = y_H + Y \quad \text{to jest} \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^2 - 3$$

5. Rešiti diferencijalnu jednačinu : $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$

Rešenje:

Nađemo rešenje odgovarajuće homogene jednačine.

$$y'' - y' = 0$$

$$p^2 - p = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 1$$

Znači da je rešenje homogene d.j. $y_H = c_1 + c_2 e^x$

Dalje ćemo nastaviti metodom varijacije konstanta (pogledaj malo teoriju)

$c_1 = c_1(x)$ i $c_2 = c_2(x)$ postavimo sistem:

$$\left. \begin{array}{l} c_1' + c_2' e^x = 0 \\ 0c_1' + c_2' e^x = \frac{1}{1 + e^x} \end{array} \right\} \text{ Iz druge jednačine izrazimo } c_2$$

$$c_2' = \frac{1}{e^x(1 + e^x)} \text{ integralimo}$$

$$c_2 = \int \frac{1}{e^x(1 + e^x)} dx \text{ U ovom integralu ćemo kao trik dodati i gore i dole } e^x$$

$$\int \frac{1}{e^x(1 + e^x)} dx = \int \frac{1e^x}{e^x e^x (1 + e^x)} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}(1 + e^x)} dx \text{ uzimamo smenu } \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| \text{ pa je}$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}(1 + e^x)} dx = \int \frac{dt}{t^2(1 + t)} \text{ ovaj integral radimo kao racionalnu funkciju!}$$

$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{(1+t)}$$

$$1 = At(t+1) + B(t+1) + Ct^2$$

$$1 = At^2 + At + Bt + B + Ct^2 \text{ sad grupišemo članove}$$

$1 = t^2(A+C) + t(A+B) + B$ ovde upoređujemo i pravimo sistem

$$A+C = 0$$

$$A+B = 0$$

$$B = 1 \quad \text{odavde je } A = -1 \text{ i } C = 1$$

Vratimo se :

$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{(1+t)} = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(1+t)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2(1+t)} &= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = -\ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|t+1| \quad \text{vratimo smenu } t = e^x \\ &= -\ln e^x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) \\ &= -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) + d_2 \quad (d_2 \text{ je konstanta}) \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo $c_2(x) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) + d_2$

Sad da nadjemo $c_1=c_1(x)$

$$c_1' + c_2' e^x = 0$$

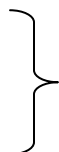
$$c_1' = -c_2' e^x = -\frac{1}{e^x(1+e^x)} e^x = -\frac{1}{1+e^x} \quad \text{integralimo}$$

$$c_1 = \int -\frac{1}{1+e^x} dx = -\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

Slično kao malopre i gore i dole dodamo e^x i uzimamo istu smenu $e^x = t$ i dobijamo

$$c_1(x) = \ln(1+e^x) - x + d_1$$

Dakle, dobili smo :



$$c_1(x) = \ln(1+e^x) - x + d_1$$

$$c_2(x) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) + d_2$$

Ovo vratimo u homogeno rešenje:

$$y_H = c_1 + c_2 e^x$$

$$y = \ln(1+e^x) - x + d_1 + (-x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) + d_2)e^x$$

$$y = \ln(1+e^x) - x + d_1 - x e^x - 1 + e^x \ln(e^x+1) + d_2 e^x$$

$$y = d_1 + d_2 e^x - x - x e^x - 1 + \ln(1+e^x) + e^x \ln(e^x+1) \text{ ovo je opšte rešenje (integral)}$$

6. Rešiti diferencijalnu jednačinu : $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

Rešenje:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$p^2 - 2p + 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} \Rightarrow p_1 = 1 + i, p_2 = 1 - i$$

$$y_H = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

Variramo konstante: $c_1 = c_1(x)$ i $c_2 = c_2(x)$

$$c_1' e^x \cos x + c_2' e^x \sin x = 0$$

Pazi $e^x \cos x \wedge e^x \sin x$ mora kao izvod proizvoda!

$$c_1' (e^x \cos x - e^x \sin x) + c_2' (e^x \sin x + e^x \cos x) = \sin x$$

$$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$$

sve smo podelili sa e^x

$$c_1' (\cos x - \sin x) + c_2' (\sin x + \cos x) = \sin x$$

$$c_2' = -c_1' \frac{\cos x}{\sin x}$$

izrazili smo c_2' i to zamenimo u drugu jednačinu

$$c_1' (\cos x - \sin x) - c_1' \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x + \cos x) = \sin x$$

sredimo i izrazimo c_1' , to je ideja!

$$c_1'(\cos x - \sin x) - c_1'(\cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \sin x$$

$$c_1'(\cos x - \sin x - \cos x - \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \sin x$$

$$c_1'(-\sin x - \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \sin x \quad \text{sve pomnožimo sa } -\sin x$$

$$c_1'(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\sin^2 x \quad \text{pazi, važi da je } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$c_1' = -\sin^2 x \quad \text{integralimo i iskoristimo } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$c_1 = -\int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) + d_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + d_1 \quad \text{nađimo sada i } c_2$$

važi da je :

$$c_2' = -c_1' \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{i } c_1' = -\sin^2 x \quad \text{pa je } c_2' = \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x \cos x$$

$$c_2' = \sin x \cos x \quad \text{integralimo}$$

$$c_2 = \int \sin x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} + d_2 \quad \text{dakle}$$

$$c_2 = \frac{\sin^2 x}{2} + d_2$$

$$\text{Vratimo } c_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + d_1 \quad \text{i } c_2 = \frac{\sin^2 x}{2} + d_2 \quad \text{u } y_H = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

$$y = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + d_1) e^x \cos x + (\frac{\sin^2 x}{2} + d_2) e^x \sin x \quad \text{konačno rešenje}$$

Možete sve da pomnožite a može da ostane i ovako , kako kaže Vaš profa.

7. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine :

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

Rešenje:

Ovo je Ojlerova jednačina (pogledaj malo teorijske napomene)

Uvodimo smenu $x=e^t$, odavde je: $y'=\frac{y'_t}{e^t}$; $y''=\frac{y''_t - y'_t}{e^{2t}}$;

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

$$e^{2t} \frac{y''_t - y'_t}{e^{2t}} - e^t \frac{y'_t}{e^t} + y_t = 2e^t \quad \text{skratimo...}$$

$$y''_t - y'_t - y'_t + y_t = 2e^t$$

$y''_t - 2y'_t + y_t = 2e^t$ ovo je nehomogena linearna d.j.

$$y''_t - 2y'_t + y_t = 0$$

$$p^2 - 2p + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 1$$

$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 t e^t$ sada variramo konstante...

$$c_1 e^t + c_2 t e^t = 0$$

$$c_1 e^t + c_2 (e^t + t e^t) = 2e^t \quad \text{obe jednačine podelimo sa } e^t$$

$$c_1 + c_2 t = 0$$

$$c_1 + c_2 (1+t) = 2$$

$c_1 = -c_2 t$ izrazili smo jednu nepoznatu i zamenimo u drugu jednačinu

$$-c_2 t + c_2 (1+t) = 2$$

$$c_2 = 2 \quad \text{integralimo}$$

$$c_2 = \int 2 dt = 2t + d_2$$

$c_2 = 2t + d_2$ našli smo jedno rešenje

$$c_1' = -c_2' t = -2t \quad \text{integralimo}$$

$$c_1 = -2 \int t dt = -2 \frac{t^2}{2} + d_1 = -t^2 + d_1$$

$$c_1 = -t^2 + d_1 \quad \text{našli smo drugo rešenje}$$

Vratimo se u homogeno rešenje:

$$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

$$y_t = (-t^2 + d_1) e^t + (2t + d_2) t e^t \quad \text{pomnožimo i sredimo..}$$

$$y_t = d_1 e^t + d_2 t e^t + t^2 e^t \quad \text{ovo je konačno rešenje po } t, \text{ vratimo smenu } x=e^t, \text{ to jest } t=\ln x$$

$$y = d_1 x + d_2 x \ln x + x \ln^2 x \quad \text{ovo je konačno rešenje po } x$$

Nađimo sada traženo partikularno rešenje:(prvo izvod rešenja)

$$y = d_1 x + d_2 x \ln x + x \ln^2 x \quad \text{ovde menjamo } y(1) = 0$$

$$y' = d_1 + d_2 (\ln x + 1) + \ln^2 x + 2 \ln x \quad \text{ovde menjamo } y'(1) = 1$$

$$0 = d_1 + d_2 \ln 1 + \ln^2 1 \quad (\text{pazi } \ln 1 = 0)$$

$$1 = d_1 + d_2 (\ln 1 + 1) + \ln^2 1 + 2 \ln 1$$

$$0 = d_1 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$1 = d_1 + d_2 \Rightarrow d_2 = 1 \quad \text{vratimo konstante u rešenje:}$$

$$y = 0x + 1x \ln x + x \ln^2 x$$

$$y = x \ln x + x \ln^2 x \quad \text{ovo je traženo partikularno rešenje}$$

8. Rešiti diferencijalnu jednačinu : $(x-1)^2 y'' - 2(x-1)y' + 2y = (x-1)^2$

Rešenje: Ovo je takođe Ojlerova jednačina, smena je $x-1 = e^t$, pa je $y' = \frac{y'_t}{e^t}$; $y'' = \frac{y_t'' - y_t'}{e^{2t}}$

$$(x-1)^2 y'' - 2(x-1)y' + 2y = (x-1)^2$$

$$e^{2t} \frac{y_t'' - y_t'}{e^{2t}} - 2e^t \frac{y_t'}{e^t} + 2y_t = e^{2t}$$

$$y_t'' - y_t' - 2y_t' + 2y_t = e^{2t}$$

$$y_t'' - 3y_t' + 2y_t = e^{2t} \text{ prvo rešavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:}$$

$$y_t'' - 3y_t' + 2y_t = 0$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 2, p_2 = 1$$

$$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \quad \text{variramo konstante } c_1 = c_1(t) \quad \text{i} \quad c_2 = c_2(t)$$

$$c_1' e^t + c_2' e^{2t} = 0 \quad \text{sve podelimo sa } e^t$$

$$c_1' e^t + 2c_2' e^{2t} = e^{2t}$$

$$c_1' + c_2' e^t = 0 \quad \text{pomnožimo ovu jednačinu sa -1}$$

$$c_1' + 2c_2' e^t = e^t$$

$$-c_1' - c_2' e^t = 0$$

$$c_1' + 2c_2' e^t = e^t$$

$$c_2' e^t = e^t$$

$$c_2' = 1 \quad \text{integralimo}$$

$$c_2 = \int 1 dt \quad \text{pa je } c_2 = t + d_2 \text{ jedno rešenje}$$

$$c_1' + c_2' e^t = 0$$

$$c_1' = -c_2' e^t \text{ pa je } c_1' = -e^t \text{ i kad integralimo } c_1 = -e^t + d_1$$

Našli smo dakle vrednosti : $c_2 = t + d_2$ i $c_1 = -e^t + d_1$ koje ćemo vratiti u homogeno rešenje:

$$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

$$y_t = (-e^t + d_1)e^t + (t + d_2)e^{2t}$$

$$y_t = -e^{2t} + d_1 e^t + t e^t + d_2 e^{2t}$$

$y_t = d_1 e^t + d_2 e^{2t} + t e^{2t} - e^{2t}$ ovo je rešenje po t , vratimo smenu $x - 1 = e^t$ to jest $t = \ln(x-1)$

$y = d_1(x-1) + d_2(x-1)^2 + (x-1)^2 \ln(x-1) - (x-1)^2$ ovo je opšte rešenje

9. Rešiti diferencijalnu jednačinu : $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1 = e^x$

Rešenje:

$xy'' - (x+1)y' + y = 0$ podelimo sve sa x

$$y'' - \frac{x+1}{x} y' + \frac{1}{x} y = 0$$

Da vas podsetimo malo teorije:

JEDNAČINA OBLIKA $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$

Posmatramo odgovarajuću homogenu jednačinu : $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ ove jednačine onda je drugo rešenje:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x) dx}}{y_1^2(x)} dx, \text{ pa je rešenje homogene jednačine } y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Nadalje variramo konstante da bi našli rešenje odgovarajuće početne nehomogene jednačine.

Mi imamo homogenu jednačinu, pa ne moramo da variramo konstante!

$$a(x) = -\frac{x+1}{x} \quad \text{i} \quad b(x) = \frac{1}{x}$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$$

$$-\int a(x) dx = \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = x + \ln x$$

$$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{x+\ln x}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{e^x e^{\ln x}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{x}{e^x} dx = \left| \begin{array}{l} x = u \quad e^{-x} dx = dv \\ dx = du \quad -e^{-x} = v \end{array} \right| = e^x (-x e^{-x} - e^{-x}) = -x - 1$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 (-x-1)$ je konačno rešenje