

JEDNAČINA OBLIKA $Y^{(n)}=f(x)$

Red ove diferencijalne jednačine se smanjuje neposrednom integracijom.

JEDNAČINA OBLIKA $F(x, y^k, y^n) = 0$

Uvodimo smenu $y^k=p$, odavde je $y^{k+1}=p'$ itd. (odnosno $y'=p$ pa je $y''=p'$)

JEDNAČINA OBLIKA $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)})$

Uvodimo smenu $y'=p$, ali pazimo, sada je $y''=p \frac{dp}{dy}$, odnosno $y''=p p'$

JEDNAČINA OBLIKA $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$

Posmatramo odgovarajuću homogenu jednačinu : $y''+a(x)y'+b(x)y=0$

Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ ove jednačine onda je drugo rešenje:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \text{ pa je rešenje homogene jednačine } y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Nadalje variramo konstante da bi našli rešenje odgovarajuće početne nehomogene jednačine.

OJLEROVA JEDNAČINA

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \text{ (ili } = f(x))$$

Uvodimo smenu $x=e^t$, odavde je: $y' = \frac{y_t}{e^t}$; $y'' = \frac{y_{tt} - y_t}{e^{2t}}$; $y''' = \frac{y_{ttt} - 3y_{tt} + 2y_t}{e^{3t}}$. Itd.

Odakle ovo? Važi da je:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_t}{e^t} \text{ dalje je } y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{y_t}{e^t} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Najpre rešimo homogeno Ojlerovu jednačinu, a onda rešavamo nehomogenu varijacijom konstanta ili suprotnim koeficijentima.

LINEARNA HOMOGENA D.J. SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA(DRUGOG REDA)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Njoj najpre pridružujemo karakterističnu jednačinu:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

U zavisnosti od rešenja karakteristične jednačine razlikujemo tri slučaja:

- 1) λ_1 i λ_2 su realna i različita, onda je : $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
- 2) λ_1 i λ_2 su realna i jednaka rešenja, onda je : $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + x c_2 e^{\lambda_2 x}$
- 3) λ_1 i λ_2 su konjugovano kompleksni brojevi : $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, onda je :
$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$$

LINEARNA NEHOMOGENA D.J. SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA(DRUGOG REDA)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

1) METOD VARIJACIJE KONSTANATA

Najpre rešimo homogeno jednačinu $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ i posmatramo sistem :

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)$$

Rešimo sistem po c_1 i c_2 ta rešenja zamenimo u $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

Pazimo, jer su c_1 i c_2 funkcije od x -sa

2) METOD NEODREDJENIH KOEFICIJENATA

i) Ako je $f(x) = e^{ax} P_n(x)$

1) a nije koren karakteristične jednačine, onda je $y = e^{ax} Q_n(x)$, gde je $Q_n(x)$ polinom n -tog stepena sa neodređenim koeficijentima.

2) ako je a koren karakteristične jednačine onda je $y = x^m e^{ax} Q_n(x)$, gde je m reda korena a

ii) Ako je $f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_k(x) \sin bx]$

1) Ako $a \pm bi$ nisu koreni karakteristične jednačine:

$$y = e^{ax} [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx] \text{ gde je } N = \max(n, k)$$

2) Ako su $a \pm bi$ koreni karakteristične jednačine:

$$y = x^m e^{ax} [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx] \text{ , gde je } m \text{-reda } a \pm bi$$