www.matematiranje.com

REDOVI

1) BROJNI REDOVI

DEF: Beskonačni zbir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = $a_1+a_2+a_3+\ldots$ naziva se red, $a_1, a_2, \ldots$ su članovi reda, dok je a_n opšti član reda.

Suma reda $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je parcijalna suma.

Tražimo $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (broj) onda red konvergira, a ako $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ ili ne postoji, onda red divergira.

TEOREMA: Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to jest ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ onda red sigurno ne konvergira.

Aritmeticki niz: $a_n = a_1+(n-1)d$, $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$, d- razlika niza, a_n- opšti član niza

Geometrijski niz: $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ ili $S_n = b_1 \frac{q^n-1}{q-1}$; q- količnik niza, $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \frac{b}{1-q}$

KRITERIJUMI:

<u>*Poredbeni*</u> <u>*kriterijum*</u>: Važi za dva reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

i) Ako je $a_n < b_n$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan

ii) Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan

iii) Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = M$, ($M \neq 0$) M je konačan broj onda redovi istovremeno konvergiraju ili divergiraju

Ovde se najčešce za uporedjivanje koristi red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za $k>1$ konvergira, a za $k \leq 1$ divergira

<u>*Dalamberov*</u> <u>*kriterijum*</u>: Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ postoji $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ = r onda važi:

- za $r > 1$ red divergira
- za $r = 1$ neodlučivo

- za $r < 1$ konvergira

Kosijev kriterijum : Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ onda važi :

- za $r > 1$ red divergira
- za $r = 1$ neodlučivo
- za $r < 1$ konvergira

Rabelov kriterijum : Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ postoji $\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = t$ onda :

-za $t > 1$ konvergira
-za $t = 1$ neodlučiv
-za $t < 1$ divergira

Integralni kriterijum : (Kosi) Ako funkcija f(x) opada, neprekidna je i pozitivna, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira istovremeno kad i $\int_1^{\infty} f(x)dx$

DEF: (a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira

(b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira ako on konvergira a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira

Lajbnicov kriterijum : Ako u redu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ **, niz a_n monotono opada i tezi 0, onda taj red konvergira**.