

O BROJEVIMA

Da se podsetimo skupova brojeva:

**Skup prirodnih brojeva je**  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Ako skupu prirodnih brojeva dodamo i nulu onda imamo skup  $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Međutim, u skupu prirodnih brojeva su definisane samo operacije sabiranja i množenja ( $+$  i  $\circ$ ).

Kako sad pa to?

Pa ako recimo pokušamo da izračunamo koliko je  $3 - 5 = ?$  ili  $10 : 4 = ?$  videćemo da rešenja nisu u skupu prirodnih brojeva jer je  $3 - 5 = -2$  a  $10 : 4 = 2,25$ .

Dakle, treba nam neki veći skup brojeva od skupa  $N$ .

**Skup celih brojeva je**  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ovde su definisane operacije  $+$ ,  $-$ ,  $\circ$  ali deljenje još “ne radi”.

Tražimo neki još veći skup...

**Skup racionalnih brojeva**  $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \right\}$

Ovde su definisane operacije  $+$ ,  $-$ ,  $\circ$ ,  $:$ , dakle ovde “radi” i deljenje.

Ovom skupu pripadaju svi celi brojevi i razlomci oblika  $\frac{p}{q}$ , a mora da važi da je  $p \in Z, q \in N$ .

Što sad pa ovo?

Pa pošto deljenje sa nulom nije dozvoljeno (bar ne zasad...) mi se obezbedimo sa  $q \in N$  da dole nije nula.

Ako su predstavljeni u decimalnom zapisu, racionalni brojevi imaju konačan broj decimala, ili se te decimale periodično ponavljaju.

Da razjasnimo ovo na nekoliko primera:

$\frac{7}{2} = 3,5$  je racionalan broj

$\frac{13}{9} = 1,333\dots = 1,\bar{3}$  je racionalan broj

$\frac{76}{99} = 0,767676... = 0,\overline{76}$  je racionalan broj

0,24356835... nije racionalan broj jer nema brojeva koji se periodično ponavljaju...

Pa kakvi su onda to brojevi?

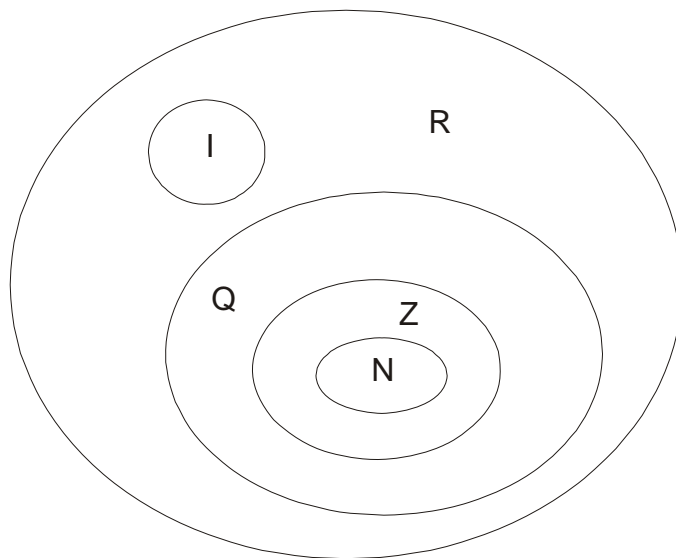
**Iracionalni brojevi su neperiodični beskonačni decimalni brojevi, i ovaj skup se obeležava sa I.**

Skupu iracionalnih brojeva još pripadaju koreni svih prostih brojeva ( $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$  ali i "kombinacije na tu temu" kao na primer:  $\sqrt{2} + 1, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  itd...) i konstanta  $\pi \approx 3,14$ .

**Unija skupa racionalnih brojeva Q i skupa iracionalnih brojeva I nam daje skup realnih brojeva R.**

Dakle:  $R = Q \cup I$

Na slici bi to izgledalo:



### KRITERIJUMI DELJIVOSTI, NZD I NZS

**Broj je deljiv sa 2 ako se završava sa 0,2,4,6,8**

Primer:

338 je deljiv sa 2 jer se završava sa 8

6335 nije deljiv sa 2 jer se završava sa 5

**Broj je deljiv sa 3 ako mu je zbir cifara deljiv sa 3**

Primer:

141 je deljiv sa 3 jer je  $1+4+1 = 6$  a 6 je deljivo sa 3, to jest  $141:3 = 47$

224 nije deljivo sa 3 jer je  $2+2+4 = 8$  a 8 nije deljivo sa 3

**Broj je deljiv sa 5 ako mu je poslednja cifra 0 ili 5**

Primer:

775 je deljiv sa 5 jer se završava sa 5 to jest  $775:5 = 155$

321 nije deljiv sa 5 jer se završava sa 1

**Ova tri kriterijuma su nam najznačajnija, navešćemo vam još neke :**

**Broj je deljiv sa 4 ako je njegov dvocifreni završetak deljiv sa 4**

**Broj je deljiv sa 6 ako je deljiv sa 2 i sa 3**

**Broj je deljiv sa 8 ako mu je trocifreni završetak deljiv sa 8**

**Broj je deljiv sa 9 ako mu je zbir cifara deljiv sa 9 ( isti kriterijum kao i za 3)**

**Broj je deljiv sa 10 ako se završava sa 0, sa 100 ako se završava sa 00 , itd.**

**Prosti brojevi** su deljivi samo sa jedinicom i sa samim sobom.

Prvih nekoliko prostih brojeva je : **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...**

**Složeni brojevi** su deljivi sa još nekim brojem osim sa jedinicom i sa samim sobom.

Prvih nekoliko složenih brojeva je: **4, 6, 8, 9, 10, 12, 14...**

**Jedinica po dogovoru nije ni prost ni složen broj.**

**Najveći zajednički delilac (NZD ili samo D)** je najveći broj sa kojim možemo podeliti date brojeve.

**Primer :** Nadjite NZD za brojeve 18 i 24.

Možemo razmišljati ovako:

18 je deljivo sa 1, sa 2, sa 3, sa 6 i sa 18

24 je deljivo sa 1, sa 2, sa 3, sa 6, sa 8, sa 12 i sa 24

Dakle 18 i 24 su zajedno deljivi sa 1, sa 2, sa 3 i sa 6 i sve su ovo njihovi zajednički delioci.

Ali nama treba **najveći**, pa uzimamo da je to 6.

Možda je vama lakše da radite sledeći postupak( koji ste najverovatnije radili i u školi):

18, 24		ovde upisujete prost broj (2,3,5...) ali tako da su <b>oba broja</b> deljiva sa njim! Kako su oba deljiva sa 2, imamo...

18, 24		2
9, 12		3 ( pazi, ovde ne može više 2 jer 9 nije deljivo sa 2)
<hr/>		

3, 4		gotov postupak, jer nema više brojeva sa kojima možemo podeliti i 3 i 4, a da to nije jedinica.
------	--	---

Sad jednostavno pomnožimo brojeve na desnoj strani:

$$D(18,24) = 2 \cdot 3 = 6$$

**Najmanji zajednički sadržalac (NZS ili samo S)** je najmanji broj koji je deljiv sa datim brojevima.

**Primer:** Nadji NZS za brojeve **8 i 12**.

Možemo razmišljati ovako:

Brojevi deljivi sa 8 su : 8,16,**24**, 32,40,**48**,56, 64...

Brojevi deljivi sa 12 su : 12,**24**,**48**, 96,...

Uočimo brojeve koji su deljivi i sa 8 i sa 12, to su: 24, 48, itd...

Nama od ovih brojeva treba najmanji a to je očigledno broj **24**.

Dakle:  $S(8,12) = 24$

Standardnim postupkom bi bilo:

$$\begin{array}{r|l}
 8,12 & 2 \\
 4,6 & 2 \\
 2,3 & 2 \text{ pazi, kod NZS ne moraju oba da budu deljiva upisanim prostim brojem} \\
 1,3 & 3 \\
 1 & 1
 \end{array}$$

Pomnožimo brojeve na desnoj strani:

$$S(8,12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

## RAZLOMCI

Razlomak je količnik dva prirodna broja  $\frac{a}{b}$ , odnosno  $\frac{a}{b}$  je isto kao i  $a : b$

$\frac{\text{brojilac}}{\text{imenilac}} \rightarrow \text{razlomacka} - \text{crta}$

$a$  je brojilac,  $b$  je imenilac a razlomacka crta menja operaciju deljenje

**Kakav sve može biti razlomak?**

- i) Ako je  $\frac{a}{b} < 1$  onda je razlomak **pravi**, na primer:  $\frac{7}{12}; \frac{3}{5}; \frac{8}{11}; \dots$
- ii) Ako je  $\frac{a}{b} > 1$  onda je razlomak **nepravi**, na primer:  $\frac{21}{12}; \frac{13}{5}; \frac{28}{11}; \dots$
- iii) Ako je  $\frac{a}{b} = 1$  (ili drugi ceo broj) onda je razlomak **prvidan**, na primer:  $\frac{2}{2}; \frac{15}{5}; \frac{55}{11}; \dots$

Proširivanje razlomaka podrazumeva da se brojilac i imenilac **pomnože istim brojem**.

**Primeri:**

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \text{ početni razlomak smo proširili sa } 2$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \text{ početni razlomak smo proširili sa } 3$$

**Skraćivanje razlomaka** podrazumeva da se brojilac i imenilac **podele istim brojem**.

**Primeri:**

$$\frac{24}{36} = \frac{24 : 6}{36 : 6} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3} \text{ Savet: uvek skratite razlomak najvećim mogućim brojem (to je ustvari NZD za ta dva broja)}$$

**Kako se sabiraju i oduzimaju razlomci?**

Moguće je sabirati i oduzimati samo razlomke sa **istim imeniocem!**

**Primer:**

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3+5-7}{10} = \frac{1}{10}$$

Sabiranje ( oduzimanje) razlomaka **nejednakih imenilaca** vrši se proširivanjem razlomaka na **isti imenilac**,

odnosno nadjemo NZS za imenioce...pa izvršimo proširivanje.

**Primer:**

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \text{najpre nadjemo NZS za } 6, 4 \text{ i } 8$$

$$\begin{array}{l|l} 6, 4, 8 & 2 \\ 3, 2, 4 & 2 \\ 3, 1, 2 & 2 \\ 3, & 1 & 3 \\ 1 & & \end{array} \longrightarrow \text{ Dakle } S(6,4,8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Dole u imeniocu je 24, a to znači da prvi razlomak proširavamo sa 4, drugi sa 6 i treći sa 3

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 - 7 \cdot 3}{24} = \frac{4 + 18 - 21}{24} = \frac{1}{24}$$

**Kako se množe i dele razlomci?**

Razlomci se množe tako što pomnožimo brojilac sa brojiocem a imenilac sa imeniocem. Naravno, uvek

prvo pogledamo da li nešto može da se “skrati”...

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Primer:**

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21} \quad \text{Nema ništa za skraćivanje...}$$

Ako je moguće, skraćivanje vršimo unakrsno i uspravno:

$$\frac{\cancel{a} \cdot \cancel{c}}{\cancel{b} \cdot \cancel{d}} \quad \text{ili (i)} \quad \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{c}}{\cancel{b} \cdot \cancel{d}}$$

**Primer:**

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{9}{6} = (\text{Skratimo 4 i 10 sa 2} \quad \text{a 9 i 6 sa 3}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = (\text{Sad možemo 2 i 2 sa 2}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{5}$$

**Razlomci se dele** tako što se brojilac prvog razlomka podeli sa brojiocem drugog razlomka i imenilac

prvog sa imeniocem drugog razlomka, pod uslovom da su oni deljivi.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$$

**Primer:**

$$\frac{15}{8} : \frac{5}{4} = \frac{15 : 5}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

Ako **nisu deljivi** tada se prvi razlomak pomnoži recipročnom vrednošću drugog razlomka.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

**Primer:**

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

**Šta je to mešoviti broj?**

Svaki nepravilni razlomak  $\frac{a}{b} > 1$  se može izraziti preko mešovitog broja.

**Primeri:**

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \quad \text{čita se: dva cela i jedna trećina}$$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} \quad \text{tri cela i četiri petine}$$

A kako mešoviti broj prebaciti u razlomak?

$$A\frac{B}{C} = \frac{A \cdot C + B}{C}$$

**Primeri:**

$$4\frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{22}{5}$$

$$2\frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 3}{8} = \frac{19}{8}$$

**Procentni zapis razlomka**

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 100\%}{b} \quad \text{Dakle, brojilac pomnožimo sa 100% a imenilac ne diramo, naravno posle skratimo ako je moguće...}$$

**Primeri:**

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 100\%}{5} = \frac{200}{5}\% = 40\%$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 100\%}{3} = \frac{100}{3}\%$$

Obrnuto , **preći iz procenta u razlomak je još lakše:**

$$x\% = \frac{x}{100} \quad \text{Dakle, samo dopišemo 100 u imeniocu.}$$

**Primeri:**

$$4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$3\% = \frac{3}{100}$$

$$12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

### Decimalni zapis razlomaka

Prvo da se podsetimo lakše stvari: **prelaska iz decimalnog zapisa u razlomak:**

- Ako ima jedno decimalno mesto, taj broj kroz 10
- Ako ima dva decimalna mesta, taj broj kroz 100
- Ako ima tri decimalna mesta, taj broj kroz 1000

**Itd.**

**Primeri:**

$$2,7 = \frac{27}{10} ; \quad 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} ; \quad 15,3 = \frac{153}{10} ;$$

$$0,09 = \frac{9}{100} ; \quad 5,41 = \frac{541}{100} ; \quad 0,55 = \frac{55}{100} = (\text{skratimo sa } 5) = \frac{11}{20}$$

$$0,009 = \frac{9}{1000} ; \quad 14,123 = \frac{14123}{1000}$$

Uvek je **teže preći iz razlomka u decimalni zapis.**

Kako razlomačka crta menja operaciju deljenja , uvek možemo podeliti brojilac i imenilac i preći u decimalni zapis, ali vodite računa da se može desiti da se javi beskonačno ponavljanje jednog ili više brojeva!

**Primeri:**

i)  $\frac{7}{2} = 7 : 2 =$  Dakle sad trebamo podeliti 7 sa 2

$$7 : 2 = 3,5$$

$$\begin{array}{r} -6 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

ii)  $\frac{1}{15} = 1 : 15 =$

$1 : 15 = 0,066\dots\dots$

$$\begin{array}{r} -0 \\ \overline{10} \\ -0 \\ \overline{100} \\ -90 \\ \overline{100} \\ -90 \\ \hline \text{itd.} \end{array}$$

Evo primera gde će 6 da se ponavlja beskonačno mnogo puta...zato pazi...

**Da bi imali brzinu u radu, toplo vam preporučujemo da zapamtite sledeće veze:**

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{1}{8} = 0,125$
	$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{8} = 0,375$
		$\frac{3}{5} = 0,6$	$\frac{5}{8} = 0,625$
		$\frac{4}{5} = 0,8$	$\frac{7}{8} = 0,875$

### Kako raditi sabiranje i oduzimanje u decimalnom zapisu?

Ovde imamo sledeći savet:

**Potpisujte i obavezno zarez ispod zareza.**

**Primeri:**

i)  $2,34 + 14,02 = ?$

$$\begin{array}{r} 2,34 \\ +14,02 \\ \hline 16,36 \end{array}$$

ii)  $0,25 + 15,138 = ?$

$\begin{array}{r} 0,25 \\ +15,138 \\ \hline \end{array}$  Pazi da se ne zbuniš, ako negde **fali broj**, slobodno **dodaj nulu**( naravno, sa desne strane).

$$\begin{array}{r} 0,250 \\ +15,138 \\ \hline 15,388 \end{array}$$

iii)  $4,31 - 3,998 = ?$

$$\begin{array}{r} 4,310 \\ -3,998 \\ \hline 0,312 \end{array}$$

**Kako se množi u decimalnom zapisu?**

Datim brojevima u decimalnom zapisu “ skinete “ zareze i ta dva broja pomnožite normalno. Zatim prebrojite decimalna mesta u oba data broja . U rešenju , s desna na levo , odbrojimo toliko mesta i tu upišemo zarez.

Naravno, uvek imate opciju da predjete u razlomak i tako pomnožite ta dva broja.

**Primeri:**

i)  $3,5 * 4,22 = ?$

Dakle skinemo zareze:  $35 * 422 = 14770$  , ovde sa desna na levo odbrojimo tri mesta jer  $3,5 * 4,22$

ukupno ima 3 decimalna mesta, pa je rešenje:  $14,770$ , odnosno  $14,77$  ↑    ↑↑

ii)  $0,5 * 0,002 = ?$

Ovde množimo samo  $5 * 2 = 10$

Ukupno ima 4 decimalna mesta:  $0,5 * 0,002$  Kako sada? Kad u broju 10 nema toliko mesta?

↑    ↑↑↑

U ovakvoj situaciji dopisujemo nule, da bi napravili ta 4 decimalna mesta:  $0,0010 = 0,001$  jer nam ova nula na kraju ne treba.

Ako vam ovo nije baš najjasnije, **predjite u razlomak:**

$$0,5 * 0,002 = \frac{5}{10} * \frac{2}{1000} = \frac{10}{10000} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

### Deljenje - decimalni zapis:

Postoji više načina da se odradi deljenje brojeva datih u decimalnom zapisu. Kao i kod množenja uvek imate opciju da **predjete u razlomak** i obavite deljenje.

Jedan od načina je i da izvršimo proširivanje oba broja sa 10,100,1000,... tako da napravimo da **delilac** bude ceo broj.

#### **Primeri:**

i)  $2,7 : 0,3 = ?$

Dakle oba proširimo sa 10, pa dobijamo  $27 : 3 = 9$

ii)  $0,35 : 1,6 = ?$

Oba proširimo sa 10, pa imamo  $3,5 : 16 = ?$

$$3,5 : 16 = 0,21875$$

$$\begin{array}{r} -0 \\ 35 \\ -32 \\ \hline 30 \\ -16 \\ \hline 140 \\ -128 \\ \hline 120 \\ -112 \\ \hline 80 \\ -80 \\ \hline 0 \end{array}$$

**A da smo išli preko razlomaka:**  $\frac{35}{100} : \frac{16}{10} = \frac{35}{100} * \frac{10}{16} = \frac{35}{160}$

#### **Da vas podsetimo i pravila za sabiranje i oduzimanje brojeva:**

- i) Ako su brojevi **istog znaka**, onda ih **saberemo** i uzmemo taj **isti znak**
- ii) Ako su brojevi **različitog znaka**, onda ih **oduzmemo** i uzmemo **znak većeg** od njih
- iii) Ako ispred broja **nema znak**, podrazumeva se da je **plus**

**Primeri:**

$-4 - 5 = -9$  **Zašto?** Brojevi su istog znaka, pa ih saberemo  $4+5 = 9$ , i uzmemo taj isti znak, dakle  $-9$

$$+10 + 2 = 12$$

$-15 + 13 = -2$  **Zašto?** Brojevi su različitog znaka, pa ih oduzimamo, a pošto je  $15 > 13$  znak je  $-$

$$-16 + 20 = +4$$

Ako vas negde zadesi zagrada, setite se one pesmice: **Ispred zagrade manje(-) nastaje menjanje, ispred zagrade više (+), zagrada se briše!**

**Primeri:**

$$10 - (-2) = 10 + 2 = 12$$

$$10 - (+2) = 10 - 2 = 8$$

$$10 + (-2) = 10 - 2 = 8$$

**Za množenje i deljenje brojeva uvek prvo odredite znak:**

$$+ \cdot + = +$$

$$+ : + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$- : - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$+ : - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- : + = -$$

**Primeri:**

$$-8 * (-4) = + 32 \quad (\text{ili samo } 32, \text{ pošto } + \text{ ne moramo da pišemo})$$

$$-10 * 9 = - 90$$

$$\frac{-15}{3} = -5 \quad \text{Zašto? Kod trojke je } +, \text{ a } - : + = -$$

## Apsolutna vrednost broja

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Ovo je definicija, koju vi naravno ništa ne razumete...Da probamo da pojasnimo...

Kad vam je samo broj pod apsolutnom vrednošću, on uvek "izlazi" kao pozitivan broj.

**Na primer:**

$$|-5| = 5 \qquad | +5| = 5$$

Ali ako imate nepoznatu: x ili y ili z ili bilo koje slovo onda ta nepoznata ima dve vrednosti.

**Na primer:** Reši jednačinu:  $|x| = 7$

**Ovde x može da bude 7 ali može da bude i -7, tako da imamo dva rešenja!**

**Slično je i kod korena:**  $\sqrt{x^2} = |x|$

**Na primer:** Reši jednačinu:  $x^2 = 16$

Ovde vodite računa, jer ćemo opet imati dva rešenja

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

Pa su rešenja:  $x = +4$  ili  $x = -4$