

Директна и обрнута пропорционалност**Увод:**

Количник реалних бројева **a** и **b**, тј. број

$$a : b = \frac{a}{b}$$

назива се размером бројева **a** и **b**

Пропорција је једнакост две размере:

$$a : b = c : d$$

и решава се тако што се помноже "спољашњи са спољашњим" и "унутрашњи са унутрашњим" чланом пропорције

$$\begin{aligned} a \cdot b &= c \cdot d \\ a * d &= b * c \end{aligned}$$

1) **Колико кошта 7 kg кромпира ако је за 5 kg кромпира плаћено 120 динара?**

Како најпре да запишемо податке?

$$\begin{array}{ll} 5 \text{ kg} & \dots\dots\dots 120 \text{ kg} \\ 7 \text{ kg} & \dots\dots\dots X \text{ kg} \end{array}$$

Онда увек напишемо стрелицу од X ка познатој.

$$\begin{array}{l} 5 \text{ kg} \dots\dots \uparrow 120 \text{ din.} \\ 7 \text{ kg} \dots\dots \uparrow X \text{ din.} \end{array}$$

*ове две стрелице посматрамо као једну*

Даље размишљамо: Да је X већи или мањи број од 120?

Ако 5 kg кошта 120 дин., онда ће 7 kg коштати више динара. Дакле X је већи број од 120. То значи да стрелица иде од ВЕЋЕГ КА МАЊЕМ броју, па тако упишемо стрелицу и код 5 kg и 7 kg, од ВЕЋЕГ КА МАЊЕМ, од 7 kg ка 5 kg

$$\begin{array}{l} \uparrow 5 \text{ kg} \dots\dots \uparrow 120 \text{ din.} \\ \uparrow 7 \text{ kg} \dots\dots \uparrow X \text{ din.} \end{array}$$

*ове две стрелице посматрамо као једну*

Даље пратимо смер стрелица и оформимо пропорцију:

$$X:120=7:5$$

$X \cdot 5 = 120 \cdot 7 \Rightarrow$  **Савет: Увек прво изрази непознату, можда ће има нешто да се скрати!!!!**

$$X = \frac{120 \cdot 7}{5}$$

$$X = 168 \text{ din.}$$

Дакле, за 7 kg кромпира треба 168 дин.

**2) Ако дневно ради 7 часова, један радник посао заврши за 15 дана. Колико часова дневно би радник требало да ради да би исти посао завршио за 12 дана?**

Запишимо најпре податке:

7 час ..... 15 дана  
X час ..... 12 дана

Напишимо стрелицу од X ка познатој.

↑ 7cas ..... 15dana  
↑ Xcas ..... 12dana  
*ове две стрелице посматрамо као једну*

Да ли је X већи или мањи број од 7?

Ако се смањи број дана морамо наравно радити више часова. Дакле, X је већи од 7 па стрелица иде од већег ка мањем, што значи од 15 ка 12.

↑ 7cas ..... ↓ 15dana  
↑ Xcas ..... ↓ 12dana  
*ове две стрелице посматрамо као једну*

Пратимо смер стрелица и правимо пропорцију:

$$X : 7 = 15 : 12$$

$$X \cdot 12 = 7 \cdot 15$$

$$X = \frac{7 \cdot 15}{12}$$

$$X = \frac{7 \cdot 5}{4}$$

$$X = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4} \text{ Часова}$$

Дакле, 12 дана морамо да радимо по  $8\frac{3}{4}$  часова, односно 8 сати и 45 минута.

**3) Од 66 kg предива добија се 165 m тканине. Колико се метара тканине добије од 112 kg предива?**

$$\begin{aligned} \uparrow 66kg \dots\dots\dots \uparrow 165m & \quad X : 165 = 112 : 66 \\ \uparrow 112kg \dots\dots\dots \uparrow Xm & \quad X \cdot 66 = 112 \cdot 165 \\ & \quad X = \frac{112 \cdot 165}{66} \\ & \quad X = 280m \end{aligned}$$

**4) Зупчаник има 54 зупца и прави 84 обртаја у минути. Колико зупца има зупчаник ако прави 126 обртаја и у преносу је са првим.**

$$\begin{aligned} \uparrow 54zub \dots\dots\dots \downarrow 84obr. & \quad X : 54 = 84 : 126 \\ \uparrow Xzub \dots\dots\dots \downarrow 126obr. & \quad X \cdot 126 = 54 \cdot 84 \\ & \quad X = \frac{54 \cdot 84}{126} \\ & \quad X = 36 \text{ Зубаца} \end{aligned}$$

**5) Једна просторија осветљена је са 15 сијалица од 60w. Колико би сијалица од 75 w давало сито осветљење?**

$$\begin{aligned} \uparrow 15sij \dots\dots\dots \downarrow 60w \\ \uparrow Xsij \dots\dots\dots \downarrow 75w \end{aligned}$$

**Пази: Ако узмемо јаче сијалице, мањи број ће давати исто осветљење.**

$$\begin{aligned} X : 15 &= 60 : 75 \\ X \cdot 75 &= 15 \cdot 60 \\ X &= \frac{15 \cdot 60}{75} \\ X &= 12 \text{ Сијалица} \end{aligned}$$

**6) За 14 kg робе плаћено је 980 динара. Колико ће се килограма робе купити за 4 340 динара?**

↑  $14\text{kg}$ ..... ↑  $980\text{din}$ .

↑  $X\text{kg}$ ..... ↑  $4340\text{din}$ .

$$X : 14 = 4340 : 980$$

$$X \cdot 980 = 14 \cdot 4340$$

$$X = \frac{14 \cdot 4340}{980}$$

$$X = 62 \text{ kg}$$

7) За 30 секунди звук пређе пут од 10200 m. Колики пут пређе звук од 1 мин. и 15 секунди?

$$30\text{сек} \dots\dots\dots 10200\text{m}$$

$$1\text{мин.}15\text{сек} \dots\dots\dots X\text{m}$$

Пази: Најпре све претвори у секунде!!!! 1мин и 15 сек =60+15=75сек

$$\uparrow 30\text{сек} \dots\dots\dots \uparrow 10200\text{m}$$

$$X : 10200 = 75 : 30$$

$$\uparrow 1\text{мин.}15\text{сек} \dots\dots\dots \uparrow X\text{m}$$

$$X \cdot 30 = 75 \cdot 10200$$

$$X = \frac{75 \cdot 10200}{30}$$

$$X = 25500\text{m}$$

8) Дванаест зидара сазида једну зграду за 5 дана. За колико дана би исти посао био завршен да је ангажовано 15 зидара?

$$\downarrow 12\text{zid} \dots\dots\dots \uparrow 5\text{dana}$$

$$X : 5 = 12 : 15$$

$$\downarrow 15\text{zid} \dots\dots\dots \uparrow X\text{dana}$$

$$X \cdot 15 = 5 \cdot 12$$

$$X = \frac{5 \cdot 12}{15}$$

$$X = 4\text{dana}$$

9) Три цеви напуне базен за 35 часова. За које ће време базен напунити пет цеви?

(Претпоставља се да све цеви једнаком брзином пуне базен).

$$\downarrow 3\text{cevi} \dots\dots\dots \uparrow 35\text{čas}$$

$$X : 35 = 3 : 5$$

$$\downarrow 5\text{cevi} \dots\dots\dots \uparrow X\text{čča}$$

$$5 \cdot X = 35 \cdot 3$$

$$X = \frac{35 \cdot 3}{5}$$

$$X = 21\text{čas}$$

**10) Дванаест радника радећи по 8 часова дневно заради 120.000 динара. Колико часова треба да ради 10 радника да би зарадили 150.000 динара?**

12rad... ↑ 8čas...120.000din.

10rad... ↑ Xčča...150.000din.

Ово је такозвана продужена пропорција. И овде најпре напишемо стрелицу од X ка 8. Код продужене пропорције је трик да сваки податак посматрамо посебно:

↓ 12rad... ↑ 8čas

↑ 102000din... ↑ 8čas

↓ 10rad... ↑ Xčča

↑ 150000rad... ↑ Xčča

Закључимо како ту иду стрелице па их пренесемо на продужену пропорцију:

↓ 12rad... ↑ 8čas... ↑ 120000din

↓ 10rad... ↑ Xčča... ↑ 150000din

Даље: Пратимо смер стрелица и правимо пропорцију.

$$X : 8 = 12 : 10 \quad \text{Пази: Пишемо = испод =}$$
$$= 150.000 : 120.000$$

Сада помножимо све " спољашње " и све "унутрашње":

$$X \cdot 10 \cdot 120000 = 8 \cdot 12 \cdot 150000$$

$$X = \frac{8 \cdot 12 \cdot 150000}{10 \cdot 120000} \text{ Skrati!}$$

$$X = 12 \text{ časova}$$

**11) Радећи дневно по 8 часова, 21 радник за 6 дана изради 720 металних профила; за колико ће дана 28 радника, радећи по 7 часова израдити 1 260m металних профила?**

8čas...21radnik... ↑ 6dana...720 profila

7čas...28radnik... ↑ Xdana...1260 profila

Стрелица од X "нагоре", па посматрамо податак по податак:

↓ 8čas.. ↑ 6dana	↓ 21rad... ↑ 6dana	↑ 720 prof ... ↑ 6dana
↓ 7čas.. ↑ Xdana	↓ 28rad... ↑ Xdana	↑ 1260 prof .. ↑ Xdana

Сада смер стрелица вратимо у продужену пропорцију:

**www.matematiranje.com**

↓ 8čas.. ↓ 21rad.. ↑ 6dan.. ↑ 720 prof

↓ 7čas.. ↓ 28rad.. ↑ Xdan.. ↑ 1260 prof

Наравно овде "мале" пропорције не морамо издвајати на страну, већ одмах закључити какав је њихов смер.

Пратимо смер стрелица:

$$\begin{aligned} X : 6 &= 8 : 7 \\ &= 21 : 28 \\ &= 1260 : 720 \end{aligned}$$

$$X \cdot 7 \cdot 28 \cdot 720 = 6 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 1260$$

$$X = \frac{6 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 1260}{7 \cdot 28 \cdot 720} \text{skrati}$$

$$X = 9 \text{dana}$$

**12) 65 радника ископа неки канал за 23 дана. После 15 дана 13 радника напусти посао. Колико дана треба онима који су остали да заврше остатак посла?**

Овде не треба уписивати податак 65 радника ... 23 дана, већ 65 радника... 8 дана. Зашто? У задатку се каже да је после 15 дана отишло 13 радника што значи да је остало  $23-15=8$  дана. Наравно за "доњи" део поставке ћемо узети  $65-13=52$  радника  
Дакле:

$$\downarrow 65 \text{rad} \dots \uparrow 8 \text{dana} \qquad X : 8 = 65 : 52$$

$$\downarrow 52 \text{rad} \dots \uparrow X \text{dana} \qquad X \cdot 52 = 8 \cdot 65$$

$$X = \frac{8 \cdot 65}{52}$$

$$X = 10 \text{dana}$$

**13) Неки посао 6 радника може да заврши за 5 дана. За колико ће дана бити исти посао завршен ако после 2 дана дође још 3 радника?**

И овде не уписујемо 6 рад...5 дана, већ 6 рад...3 дана ( $5-2=3$  дана) за колико би они "нормално" завршили посао. У доњем делу поставке задатака је 9 рад ...X дана ( $6+3=9$  рад)

↓ 6rad... ↑ 3dana

$$X : 3 = 6 : 9$$

↓ 9rad... ↑ Xdana

$$X \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

$$X = 2 \text{ dana}$$

За оне који не воле да "мозгују" да ли су величине директно или обрнуто пропорционалне напомнимо да су најчешћи случајеви **ОБРНУТЕ ПРОПОРЦИОНАЛНОСТИ** следећи:

- Број радника – утрошак времена
- Брзина кретања – време путовања
- Зупчаници – број обртаја

### Procentni račun

Glavna formula ovde je

$$G : P = 100 : p$$

Šta je šta u proporciji?

**G** je glavnica, (celina), ono što je "na početku" i na njega se uvek odnosi 100%.

**P** je deo glavnice (celine), ono što je "na kraju" i na njega se odnosi  $p$  %. Naravno, ponekad P može biti veće od G.

$p$  -je uvek u procentima, i to:

Ako u zadatku kaže da se nešto povećava za X%, onda je  $p = (100+X)\%$ .

Ako u zadatku kaže da se nešto smanjuje za X%, onda je  $p = (100-X)\%$

U datom zadatku iz procentnog računa, mi najpre odredimo šta nam je zadato: G, P ili

$p$ . Ubacimo te podatke u  $G:P=100:p$  i nadjemo nepoznatu.

**1) Trideset procenta jedne dužine iznosi 42cm. Kolika je dužina čitave duži?**

$$G : P = 100 : p$$

$$G : 42 = 100 : 30$$

$$30G = 42 \cdot 100$$

$$G = \frac{42 \cdot 100}{30} \text{ skrati}$$

$$G = 140 \text{ cm}$$

2) Cena cipela je 2.700dinara. Koliko će biti cena nakon sniženja od 15%?

$$G : P = 100 : p$$

**PAZI:** Popust je 15%, znači da je  $p = 100 - 15 = 85\%$

$$2.700 : P = 100 : 85$$

$$P \cdot 100 = 2.700 \cdot 85$$

$$P = \frac{2.700 \cdot 85}{100}$$

$$P = 2.295 \text{ dinara}$$

3) Posle prelaska na novo radno mesto jednom radniku je plata povećana za 20%. Kolika mu je bila plata ako je to povećanje 3.200 dinara?

$$G : P = 100 : p$$

**Pazi:** 20% se odnosi samo na povećanje od 3.200 dinara, pa  $p$  nije  $(100+20)\%$  jer se ne odnosi na platu sa povećanjem!!!

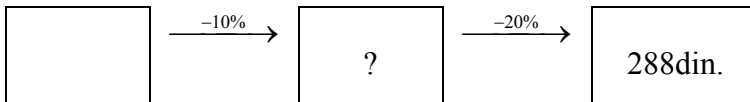
$$G : 3.200 = 100 : 20$$

$$G \cdot 20 = 3.200 \cdot 100$$

$$G = \frac{3.200 \cdot 100}{20}$$

$$G = 16.000 \text{ dinara}$$

4) Cena knjige snižena je za 10%, a zatim za 20% i sada iznosi 288 dinara. Kolika je cena bila pre prvog sniženja?



Ovde će mo naći najpre cenu knjige pre drugog sniženja. (unazad)

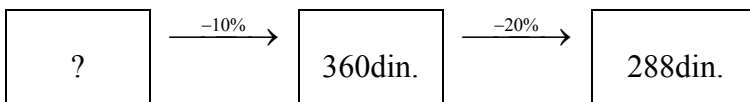
$$G : P = 100 : p$$

$$G : 288 = 100 : 80$$

$$80 \cdot G = 288 \cdot 100$$

$$G = \frac{288 \cdot 100}{80}$$

$$G = 360 \text{ dinara}$$



Sad tražimo početnu cenu:

$$G : P = 100 : p$$

$$G : 360 = 100 : 90$$

$$90 \cdot G = 360 \cdot 100$$

$$G = \frac{360 \cdot 100}{90}$$

$$G = 400 \text{ dinara}$$

**5) Nagrada radniku po jednom času od 6.500 dinara poraste na 7.020 dinara. Koliko je to u procentima?**

$$G : P = 100 : p$$

$$P = 7.020 - 6.500$$

$$6.500 : 520 = 100 : p$$

$$P = 520$$

$$6.500 \cdot p = 520 \cdot 100$$

$$p = \frac{520 \cdot 100}{6.500}$$

$$p = 8\%$$

**6) Na kontrolnoj pismenoj vežbi bila su data tri zadatka. Pri tome 12% učenika nije rešilo ni jedan zadatak, 32% učenika rešilo je jedan ili dva zadatka, dok je 14 učenika rešilo sva tri zadatka. Koliko je ukupno učenika radilo vežbu?**

Obeležimo sa  $x$  broj učenika.

$$12\%x + 32\%x + 14 = 100\%x$$

$$\frac{12}{100}x + \frac{32}{100}x + 14 = x \quad ; \quad \text{PAZI: } 100\% = \frac{100}{100} = 1$$

množimo celu jednačinu sa 100

$$12x + 32x + 1400 = 100x$$

$$12x + 32x - 100x = -1400$$

$$-56x = -1400$$

$$x = \frac{-1.400}{-56}$$

$$x = 25$$

**7) Tek oboreno stablo bilo je teško 2,25 tona i sadržalo je 64% vode. Posle nedelju dana to stablo je sadržalo 46% vode. Za koliko se promenila težina stabla za tu nedelju?**

36% suva materija	64% voda
-------------------	----------

2,25 tona

54% suva materija	46% voda
-------------------	----------

Najpre ćemo izračunati koliko u 2,25 tona ima suve materije koja se **NE MENJA!!**

$$G : P = 100 : p$$

$$2,25 : P = 100 : 36$$

$100 \cdot P = 2,25 \cdot 36 \rightarrow$  Ova suva materija je ostala, pa se odnosi na **54% stabla**

$$P = \frac{2,25 \cdot 36}{100}$$

$$P = 0,81 \text{ tona}$$

$$G : P = 100 : p$$

$$G : 0,81 = 100 : 54$$

$$G \cdot 54 = 0,81 \cdot 100$$

$$G = \frac{0,81 \cdot 100}{54}$$

$$G = 1,5 \text{ tona}$$

**Znači da sad stablo ima 1,5 tona pa je smanjenje  $2,25 - 1,5 = 0,75$  tona**

### Račun podele ( trik sa k)

**1) Dva suplementna ugla su u razmeri 5:7. Odrediti te uglove.**

Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  traženi uglovi.

$$\begin{array}{l} \alpha : \beta = 5 : 7 \\ \alpha = 5k \\ \beta = 7k \end{array} \left. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha + \beta = 180^\circ \text{ (suplementi)} \\ 5k + 7k = 180^\circ \\ 12k = 180^\circ \\ k = \frac{180^\circ}{12} \\ k = 15^\circ \end{array}$$

Kada nadjemo  $k$  vratimo se ‘u’  $\alpha$  i  $\beta$ .

$$\begin{array}{l} \alpha = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ \\ \beta = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ \end{array}$$

2) Podeliti duž od 456m na tri dela čije će dužine biti redom proporcionalne

brojevima  $\frac{2}{3}, \frac{9}{8}, \frac{7}{12}$

Neka su delovi redom  $x:y:z = \frac{2}{3} : \frac{9}{8} : \frac{7}{12}$

$$\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}k \\ y = \frac{9}{8}k \\ z = \frac{7}{12}k \end{array} \left. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 456m \\ \frac{2}{3}k + \frac{9}{8}k + \frac{7}{12}k = 456 / \cdot 24 \\ 16k + 27k + 14k = 456 \cdot 24 \\ 57k = 10944 \\ k = 192m \end{array}$$

---

$$x = \frac{2}{3} \cdot 192 = 128m$$

$$y = \frac{9}{8} \cdot 192 = 216m$$

$$z = \frac{7}{12} \cdot 192 = 112m$$

3) Tri električna otpornika vezana u seriji stoje u razmeri 2:3:4. Ukupan otpor je 24 oma. Koliki su pojedini otpori?

Neka su otpori redom  $x, y$  i  $z$ .  
Pošto su vezani u seriji:

$$\begin{array}{l} x : y : z = 2 : 3 : 7 \\ x = 2k \\ y = 3k \\ z = 7k \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y + z = 24 \\ 2k + 3k + 7k = 24 \\ 12k = 24 \\ k = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 2 \cdot 2 = 4\Omega \\ y = 3 \cdot 2 = 6\Omega \\ z = 7 \cdot 2 = 14\Omega \end{array}$$

**PAZI: Ako su vezani paralelno (fizika)**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

**4) Sumu od 728000 dinara podeliti na tri lica tako da svako sledeće dobija 20% više od prethodnog?**

Neka 1. lice treba da dobije  $x$  dinara

1. lice  $\rightarrow x$  dinara
2. lice  $\rightarrow x + 20\%x = x + 0,2x = 1,2x$
3. lice  $\rightarrow 1,2x + 20\%(1,2x) = 1,2x + 0,24x = 1,44x$

$$\begin{aligned} x + 1,2x + 1,44x &= 728.000 \\ 3,64x &= 728.000 \\ x &= \frac{728.000}{3,64} \\ x &= 200.000 \end{aligned}$$

Dakle:

1. lice  $\rightarrow 200000$  din.
2. lice  $\rightarrow 1,2 \cdot 200000 = 240000$  din
3. lice  $\rightarrow 1,44 \cdot 200000 = 288000$  din.

