LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE SA JEDNOM NEPOZNATOM

LINEARNE JEDNAČINE

Pod linearnom jednačinom ''po x'' podrazumevamo svaku jednačinu sa nepoznatom x koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu oblika:

$$a \cdot x = b$$

gde su a i b dati realni brojevi.

Rešenje ove jednačine je svaki realan broj x_0 za koji važi:

$$ax_0 = b$$

Ako nam posle rešavanja ostane jednačina većeg stepena (drugog, trećeg …) onda nju probamo da rastavimo na činioce i koristimo:

$$A \cdot B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \quad \text{ili} \quad B = 0$$

$$A \cdot B \cdot C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \quad \text{ili} \quad B = 0 \quad \text{ili} \quad C = 0$$

Za svaku linearnu jednačinu važi:

$$ax = b$$

$x = \frac{b}{a}$

ako je $a \neq 0$

jedinstveno rešenje

Primer:

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2}$

$x = 5$

$a = b = 0$

ima beskonačno mnogo rešenja

Primer:

$0 \cdot x = 0$

Svaki broj je rešenje

$a = 0,\ b \neq 0$

Nema rešenja

Primer:

$0 \cdot x = 7$

$x = \frac{7}{0} = ?$

Deljenje sa 0 nije dozvoljeno (za sad)

Kako rešavati jednačinu?

- Prvo se oslobodimo razlomaka (ako ih ima) tako što celu jednačinu pomnožimo sa NZS
- Onda se oslobodimo zagrada (ako ih ima) množeći ''svaki sa svakim''.
- Nepoznate prebacimo na jednu a poznate na drugu stranu znaka jednakosti (=).
  (PAZI: prilikom prelaska sa jedne na drugu stranu menja se znak)
- ''sredimo'' obe strane (oduzmemo i saberemo) i dobijemo $a \cdot x = b$
- Izrazimo nepoznatu $x = \frac{b}{a}$

VAŽNO: Ako negde vršimo skraćivanje moramo voditi računa da **taj izraz koji kratimo mora biti različit od nule**. U suprotnom se može desiti apsurdna situacija.

Primer: Rešiti jednačinu: $\frac{x^2}{x} = 0$

Ako skratimo $\frac{x \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$?

Ne smemo skratiti jer je uslov $x \neq 0$.

Evo par primera :

1. **Rešiti jednačinu: 9 – 2x = 5x + 2**

Rešenje:

Nema razlomaka i zagrada tako da odmah ''prebacujemo'' nepoznate na jednu a poznate na drugu stranu.

$$9 - 2x = 5x + 2$$
$$-2x - 5x = +2 - 9$$
$$-7x = -7$$
$$x = \frac{-7}{-7}$$
$$x = 1$$

2. **Rešiti jednačinu:** $3(2-3x)+4(6x-11)=10-x$

Rešenje:

$3(2-3x)+4(6x-11)=10-x$ ↔ najpre se oslobodimo zagrada ("svaki sa svakim" množimo)

$6-9x+24x-44=10-x$ ↔ nepoznate na levu a poznate na desnu stranu prebacimo…

$-9x+24x+x=10-6+44$ "sredimo obe strane"

$16x=48$ izrazimo nepoznatu

$x=\frac{48}{16}$

$x=3$

3. **Rešiti jednačinu:** $\frac{y-5}{7}+2=\frac{2y-3}{2}-\frac{6y+5}{14}$

Rešenje:

Ovde najpre moramo da se oslobodimo razlomaka a to ćemo uraditi tako što celu jednačinu pomnožimo sa najmanjim zajedničkim sadržaocem za 7, 2 i 14 a to je očigledno 14.

Kad niste sigurni koliki je NZS "napamet" nadjite ga " na stranu"

7, 2, 14	2
7, 1, 7	7
1, 1	

$\cancel{14}\cdot\frac{y-5}{\cancel{7}}+14\cdot 2=\cancel{14}\cdot\frac{2y-3}{\cancel{2}}-\cancel{14}\cdot\frac{6y+5}{\cancel{14}}$

$2(y-5)+28=7(2y-3)-1(6y+5)$ Pazi : upiši i 1 zbog zagrade

$$2y-10+28=14y-21-6y-5$$
$$2y-14y+6y=-21-5+10-28$$
$$-6y=-44$$
$$y=\frac{-44}{-6}$$
$$y=+\frac{22}{3}$$

LINEARNE NEJEDNAČINE

Linearna nejednačina " po x" je nejednačina koja se ekvivaletnim transformacijama može svesti na oblik:

$$ax>b$$
$$ax\geq b$$
$$ax<b$$
$$ax\leq b$$

gde su a i b realni brojevi.

Linearne nejednačine rešavamo slično kao i jednačine koristeći ekvivalentne transformacije. **Važno je reći da se smer nejednakosti menja kada celu jednačinu množimo (ili delimo) negativnim brojem.**

Primer:

Posmatrajmo dve nejednačine : 2x<10 i -2x<10

$$2x<10$$
$$x<\frac{10}{2}$$
$$x<5$$

$$-2x<10$$

Pazi: Delimo sa (-2)

$$x>\frac{10}{-2}$$
$$x>-5$$

Naravno i ovde se može deliti da nejednačina ima rešenja, nema rešenja ili ih pak ima beskonačno mnogo (u zavisnosti u kom skupu brojeva posmatramo datu nejednačinu)

Evo još par primera:

1) Reši nejednačinu: $3(x-2)+9x<2(x+3)+8$

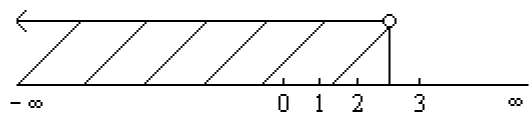
Rešenje: $3(x-2)+9x<2(x+3)+8$ → oslobodimo se zagrada

$$3x-6+9x<2x+6+8$$ → nepoznate na jednu, poznate na drugu stranu

$$2x+9x-2x<6+8+6$$
$$9x<20$$
$$x<\frac{20}{9}$$
$$x<2\frac{2}{9}$$

Uvek je **''problem'' : kako zapisati skup rešenja?**

Možemo zapisati $\{x\in R \mid x<2\frac{2}{9}\}$ a ako je potrebno to predstaviti i na brojevnoj pravoj:



$$x\in\left(-\infty,2\frac{2}{9}\right)$$

<u>Pazi:</u>

Kod $+\infty$ i $-\infty$ uvek idu male zagrade ( )
Kod znakova $<$ i $>$ male zagrade i prazan kružić
Kod $\leq$, $\geq$ idu srednje zagrade $[\ ]$ i pun kružić

Male zagrade nam govore da ti brojevi nisu u skupu rešenja, dok $[,]$ govore da su i ti brojevi u rešenju.

2. Reši nejednačinu: $\frac{2a+1}{3}-\frac{3a-2}{2}\geq -1$

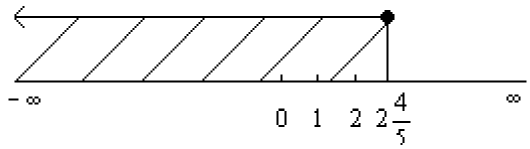
Rešenje:

$$\frac{2a+1}{3}-\frac{3a-2}{2}\geq -1$$ → celu nejednačinu pomnožimo sa 6 (NZS za 3 i 2)

$$2(2a+1)-3(3a-2)\geq -6$$
$$4a+2-9a+6\geq -6$$
$$4a-9a\geq -6-2-6$$
$$-5a\geq -14$$ → pazi: delimo sa (-5) pa se znak okreće

$$a \le \frac{-14}{-5}$$

$$a \le +2\frac{4}{5}$$



U skupu R su rešenja $a \in \left(-\infty, 2\frac{4}{5}\right]$

PAZI: Dan nam recimo traže rešenja u skupu N (prirodni brojevi), onda bi to bili samo brojevi $\{1,2\}$

3) Rešiti nejednačine:

a) $(x-1)\cdot(x-4) > 0$
b) $(x+3)\cdot(x-5) \le 0$

Kod ovog tipa nejednačina koristićemo da je:

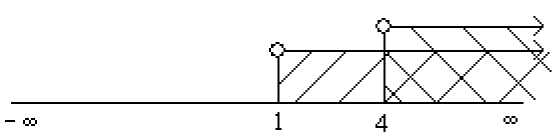
$$A\cdot B > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A>0, B>0) \text{ ili } (A<0, B<0)$$
$$A\cdot B < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A>0, B<0) \text{ ili } (A<0, B>0)$$

Naravno iste ''šablone'' koristimo i za znakove $\ge$ i $\le$, a i za $\frac{A}{B} > 0$ i $\frac{A}{B} < 0$ **gde još vodimo računa da je** $B \ne 0$ **.**

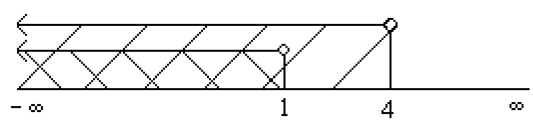
a) $\underbrace{(x-1)}_{A}\cdot\underbrace{(x-4)}_{B} > 0$

$$(x-1>0, x-4>0) \quad \text{ili} \quad (x-1<0, x-4<0)$$
$$(x>1, x>4) \quad \text{ili} \quad (x<1, x<4)$$

Sada rešenje ''spakujemo'' na brojevnoj pravoj!!!



$x \in (4, \infty)$

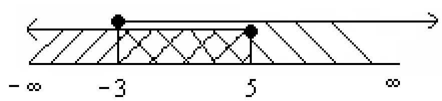


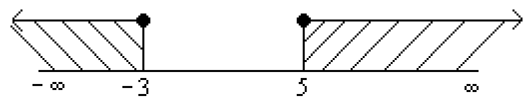
$x \in (-\infty, 1)$

Rešenje je $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

b) $\underbrace{(x+3)}_{A} \cdot \underbrace{(x-5)}_{B} \leq 0$

$(x+3 \geq 0, x-5 \leq 0)$ ili $(x+3 \leq 0, x-5 \geq 0)$
$(x \geq -3, x \leq 5)$ ili $(x \leq -3, x \geq 5)$





$x \in [-3, 5]$ $\varnothing$ prazan skup

Dakle, konačno rešenje je $x \in [-3, 5]$