www.matematiranje.com

ALGEBARSKI IZRAZI I POLINOMI

Transformacije algebarskih izraza

Kako dati izraz rastaviti na činioce?

Prati sledeći postupak:

1) Izvuči zajednički iz svih ispred zagrade, naravno, ako ima (distrubutivni zakon)

2) Gledamo da li je neka formula:

$A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$ Razlika kvadrata

$I^2 + 2\cdot I\cdot II + II^2 = (I+II)^2$ Kvadrat binoma (kvadrat zbira)

$I^2 - 2\cdot I\cdot II + II^2 = (I-II)^2$ Kvadrat binoma (kvadrat razlike)

3) Ako neće ništa od ove dve stavke, ‘’sklapamo’’ 2 po 2, 3 po 3. itd.

Primeri

Izvlačenje zajedničkog ispred zagrade:

1) $5a + 5b = 5(a+b)$

2) $2a + 4b = 2(a+2b)$ **PAZI: Kad vidimo da ništa ne ostaje pišemo 1 !!!**

3) $a^2 - a = a(a-1)$

4) $14ab^3 - 7a^2b = 7ab(2b^2 - a)$

$7\cdot 2\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b \qquad 7\cdot a\cdot a\cdot b$

Ako nije jasno šta treba izvući ispred zagrade, možemo svaki član rastaviti:

$14ab^3 = \underline{7}\cdot 2\cdot \underline{a}\cdot \underline{b}\cdot b\cdot b$ i $7a^2b = \underline{7}\cdot \underline{a}\cdot a\cdot \underline{b}$

Zaokružimo (podvučemo) iste i izvučemo ispred zagrade a one koje su ostali stavimo u zagradu!!!

5)

$3x^2y + 6xy^2 - 3xy =$

$\underline{3} \cdot \underline{x} \cdot x \cdot \underline{y} + \underline{3} \cdot 2 \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} \cdot y - \underline{3} \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} = 3xy(x + 2y - 1)$

6) $18a^3b^2 - 15a^2b^3 + 9a^3b^3 =$

$6 \cdot \underline{3} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot a \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} - 5 \cdot \underline{3} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} \cdot b + \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot a \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} \cdot b =$

$= 3a^2b^2(6a - 5b + 3ab)$

Naravno, možemo rezmišljati i ovako:

Za 18, 15 i 9 zajednički je 3
Za a^3, a^2 i a^3 zajednički je a^2 i
Za b^2, b^3 i b^3 zajednički je b^2

Dakle, ispred zagrade je $3a^2b^2$.

7) $a^x + a^{x+1} = a^x + a^x \cdot a^1 = a^x(1 + a)$

8) $a^{m+1} - a = a^m \cdot a^1 - a = a(a^m - 1)$

9) $4x^{a+2} + 12x^a = 4x^a \cdot x^2 + 12x^a$
$= 4x^a(x^2 + 3)$

10) $12x^{2n+3} + 16x^{n+1} = 12x^{2n} \cdot x^3 + 16x^n \cdot x^1$
$= 4x^n \cdot x(3x^n \cdot x^2 + 4)$
$= 4x^{n+1}(3x^{n+2} + 4)$

U zadacima 7, 8, 9 i 10 smo koristili pravila za stepenovanje.!!!

Upotreba formula

$$\boxed{A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)}$$

1) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

2) $9 - a^2 = 3^2 - a^2 = (3 - a)(3 + a)$

3) $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$

4) $y^2-144=y^2-12^2=(y-12)(y+12)$

5) $4x^2-9=2^2x^2-3=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3)$

Pazi: **Da bi upotrebili formulu za razliku kvadrata ''SVAKI'' član mora da je na kvadrat.**

6) $25x^2-16y^2=5^2x^2-4^2y^2=(5x)^2-(4y)^2=(5x-4y)(5x+4y)$

7) $\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{25}y^2=\frac{1^2}{4^2}x^2-\frac{3^2}{5^2}y^2=\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}y\right)\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{5}y\right)$

8) $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

Dakle: $x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ **ZAPAMTI!!!**

9) $16a^4-1=2^4a^4-1^4$

$=(2a)^4-1^4$, ako iskoristimo prethodni rezultat: $2a=x$ i $1=y$

$=(2a-1)(2a+1)((2a)^2+1^2)$

$=(2a-1)(2a+1)(4a^2+1)$

$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$ i $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$ ili

$$\boxed{I^2+2\cdot I\cdot II+II^2=(I+II)^2 \quad \text{i} \quad I^2-2\cdot I\cdot II+II^2=(I-II)^2}$$

1) $x^2+8x+16=$ Gledamo prvi i treći član jer nam oni daju A^2 i B^2, a onaj u sredini proveravamo da li je $2\cdot A\cdot B$

Kako je $A^2=x^2 \Rightarrow A=x$

$B^2=16 \Rightarrow B=4$

$2\cdot AB=2\cdot x\cdot 4=8x$

Pa je $x^2+8x+16=(x+4)^2$

2) $\underset{\substack{\uparrow \\ A^2}}{x^2} - 10x + \underset{\substack{\uparrow \\ B^2}}{25} = (x-5)^2$ jer je

$A^2 = x^2 \Rightarrow A = x$

$B^2 = 25 \Rightarrow B = 5$

$2AB = 2 \cdot x \cdot 5 = 10x$

Proveri da li je 2AB

3) $64 + 16y + y^2 = (8+y)^2$

4) $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a+2b)^2$

5) $a^2 - 6ab + 9b^2 = (a-3b)^2$

6) $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (a-5y)^2$

7) $0{,}25 - 0{,}1a + 0{,}01a^2 = (0{,}5 - 0{,}1a)^2$ jer je

$A^2 = 0{,}25 \Rightarrow A = 0{,}5$

$B^2 = 0{,}01a^2 \Rightarrow B = 0{,}1a$

8) $0{,}04a^2 + 0{,}8ab + 4b^2 = (0{,}2a + 2b)^2$

<u>Sklapanje "2 po 2"</u>

U situaciji kad ne možemo izvući zajednički, niti upotrebiti neku formulu, koristimo sklapanje ''2 po 2''.

<u>Primeri:</u>

1) $2x + 2y + ax + ay =$ izvlačimo ispred zagrade zajednički za prva dva, pa za druga dva.

$= 2(x+y) + a(x+y) = (x+y)(2+a)$

2) $\underbrace{6ax - 9bx} + \underbrace{8ay - 12by} =$

$= 3x(2a-3b) + 4y(2a-3b) = (2a-3b)(3x+4y)$

3) $\underbrace{4a^2 + 4a} - ab - b =$ **PAZI NA ZNAK!!!**

$= 4a(a+1) - b(a+1) = (a+1)(4a-b)$

4) $\underbrace{12ab+20a}-\underbrace{3b-5}=$ **PAZI NA ZNAK!!!**

$=4a(3b+5)-1(3b+5)=(3b+5)(4a-1)$

5) $\underbrace{xa-xb}+\underbrace{yb-ya}=$

$=x(a-b)+y(b-a)=$ Ovde moramo ‘’okrenuti’’
izraz $b-a$ da postane $a-b$, ili pazi, kako je $b-a=-(a-b)$, moramo promeniti znak ispred y
$=x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(x-y)$

6) $2ax+b-2bx-a=$ ne " juri " da sklopiš "prva dva" i "druga dva" možda je bolja neka druga kombinacija!!

$=a(2x-1)+b(1-2x)=$ Slično kao u prethodnom primeru, promenimo znak ispred **b**, a oni u zagradi promene mesta,

$=a(2x-1)-b(2x-1)=(2x-1)(a-b)$

7) $8x^2y-2by+2bx-8xy^2=8xy(x-y)+2b(x-y)=(x-y)(8xy+2b)$

8) $x^2-6x-7=$ Ovo liči na kvadrat binoma ali očigledno nije. Ne možemo izvući zajednički iz svih, niti sklopiti ‘’2 po 2’’

Šta raditi?

Naravno, učinici II godina srednje škole i stariji znaju da treba iskoristiti da je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, ali za sad moramo raditi ovako:

1. način: $x^2-6x-7=$ ideja je da se srednji član napiše kao zbir ili razlika neka 2 izraza. Naravno, to možemo učiniti na veliki broj načina. Onaj prvi je kad posmatramo član bez x-sa i kako njega možemo predstaviti u obliku proizvoda. Kako je $7=7\cdot 1$ to ćemo napisati umesto -6x izraz -7x+1x ili +1x-7x svejedno.

Onda sklapamo "2 po 2"
$x^2-6x-7=x^2-7x+1x-7=x(x-7)+1(x-7)=(x-7)(x+1)$

2. način: $x^2-6x-7=$ izvršimo dopunu do ‘’punog’’ kvadrata, što znači da moramo dodati (i oduzeti) drugi član na kvadrat.

$= \underbrace{x^2 - 6x} + \underset{-}{3^2} - \underset{-}{3^2} - 7 =$

$=$ **zapamti:** uvek dodaj (i oduzmi) onaj uz x podeljen sa 2, pa na kvadrat. $=$

$= \underbrace{x^2 - 6x + 9} - 9 - 7$

$= (x-3)^2 - 16$

$= (x-3)^2 - 4^2$ $\quad =$ sada iskoristimo da je ovo razlika kvadrata.

$= (x-3-4)(x-3+4)$

$= (x-7)(x+1)$

Ti naravno izabereš šta ti je lakše, odnosno šta više voli tvoj profesor. Evo još par primera:

9) $\quad x^2 + 5x + 6 = ?$

1.način: Kako je $6 = 3 \cdot 2$ to ćemo umesto 5x pisati 3x+2x

$\underbrace{x^2 + 3x} + \underbrace{2x + 6} = x(x+3) + 2(x+3) = (x+3)(x+2)$

2.način: Dodajemo (i oduzmemo) onaj uz x podeljen sa 2, pa na kvadrat.

Znači $+\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$, pa je:

$$x^2 + 5x + 6 = \underbrace{x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4}$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (x+2)(x+3)$$

10) $x^2 + 7x + 10 = ?$

1.način: $\underbrace{x^2+5x}+\underbrace{2x+10}=x(x+5)+2(x+5)=(x+5)(x+2)$

2.način: $x^2+7x+10=x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+10$

$$=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{40}{4}$$

$$=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

$$=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=(x+2)(x+5)$$

Polinomi

Oblika su:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ... + a_1 x + a_0$$

Ovaj oblik se dobija "sredjivanjem” polinoma (sabiranjem, oduzimanje...) i naziva se kanonički, x-je promenljiva $a_n, a_{n+1}, ..., a_0$ su koeficijenti (konstante), n je prirodan broj ili nula.

Ako je $a_n \neq 0$, onda kažemo da je polinom P stepena n, pa je a_n ‘’najstariji’’ koeficijent.

Primer: $P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$

-ovaj polinom je stepena 3 a najstariji koeficijenat je 4.

Sabiranje i oduzimanje polinoma

Primer:

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7$$
$$Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$$

$$P(x) + Q(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6x - 7) + (4x^3 - 2x^2 + 12x + 3)$$
$$= 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7 + 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$$

$=$ krenemo sa sabiranjem sa najvecim stepenom pa dok ne dodjemo do ‘’slobodnih članova’’

$$= 7x^3 - 6x^2 + 18x - 4$$

$$P(x) - Q(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6x - 7) - (4x^3 - 2x^2 + 12x + 3)$$

$=$ **pazi: Minus ispred zagrade menja znak <u>svim</u> članovima u zagradi**

$$= 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7 - 4x^3 + 2x^2 - 12x - 3$$
$$= -x^3 - 2x^2 - 6x - 10$$

Najbolje je da podvlačite slične monome kako se ne desi greška u sabiranju (oduzimanju)

Množenje polinoma

Primer 1: $P(x) = 2x - 3$

$Q(x) = x^2 + 4x - 7$

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x-3) \cdot (x^2 + 4x - 7)$$

Kako množiti ?

Množi se ‘’svaki sa svakim’’. Najbolje je da prvo odredimo znak
$:(+\cdot+=+,\ -\cdot-=+,\ +\cdot-=-,\ -\cdot+=-)$, onda pomnožimo brojke i na kraju nepoznate. Naravno da je $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, itd. (ovde koristimo pravila iz stepenovanja: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Vratimo se na zadatak:

$$(2x-3) \cdot (x^2 + 4x - 7) =$$

$2x^3 + 8x^2 - 14x - 3x^2 - 12x + 21 =$ uočimo slične monome...

$= 2x^3 + 5x^2 - 26x + 21$

Primer 2:

$A(x) = -x^2 + 4x - 7$

$B(x) = 2x^2 + 5x + 1$

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (-x^2 + 4x - 7) \cdot (2x^2 + 5x + 1) \\ &= -2x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x^3 + 20x^2 + 4x - 14x^2 - 35x - 7 \\ &= -2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 31x - 7 \end{aligned}$$