

## GEOMETRIJSKA VEROVATNOĆA

U slučaju kada se ishod nekog opita definiše slučajnim položajem tačke u nekoj oblasti, pri čemu je proizvoljni položaj tačke u toj oblasti jednako moguć, koristimo geometrijsku verovatnoću.

Ako, recimo, obeležimo da je “dimenzija” cele oblasti  $S$ , a  $S_p$  “dimenzija” dela te oblasti, čije se sve tačke smatraju

povoljnom za ishod događaja, onda se verovatnoća izračunava:  $P = \frac{S_p}{S}$ .

Reč dimenzija smo namerno stavili pod navodnike jer  $S_p$  i  $S$  mogu predstavljati duži, površine, zapremine itd.

U zadacima sa geometrijskom verovatnoćom je gotovo neophodno nacrtati sliku, uočiti koja dužina, površina ili zapremina je nama “povoljna”. Pažljivo čitajte zadatak ...

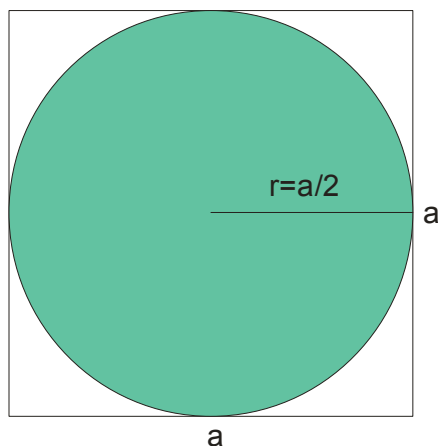
### PRIMER 1.

**U kvadratu je upisan krug. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka u kvadratu pripada i krugu.**

#### Rešenje:

Definišimo događaj  $A$ : “slučajno izabrana tačka je u krugu”

Da skiciramo problem:



Ovde nam očigledno trebaju površine.

Površina kvadrata stranice  $a$  je  $S = a^2$ . Poluprečnik upisanog kruga je polovina stranice kvadrata, pa je povoljna

$$\text{površina } S_p = r^2 \pi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{a^2 \pi}{4}$$

$$\text{Oдавde je } P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{\frac{a^2 \pi}{4}}{a^2} = \frac{\cancel{a^2} \pi}{4 \cancel{a^2}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$$

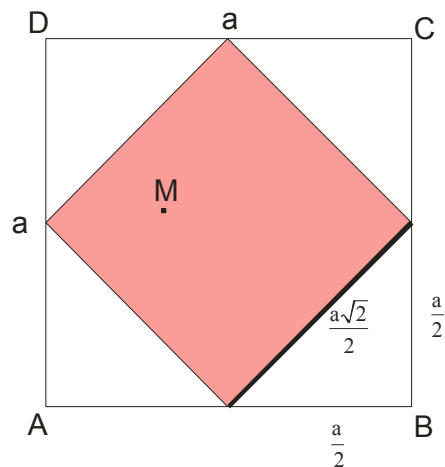
**PRIMER 2.**

Sredine stranica kvadrata , stranice  $a$ , spajanjem daju ponovo kvadrat. Tačka M je na slučajan način izabrana.

Odrediti verovatnoću da je izabrana tačka M iz drugog ( manjeg) kvadrata.

**Rešenje:**

Definišimo događaj A: “ slučajno izabrana tačka M je u manjem kvadratu”



Ako je stranica većeg kvadrata  $a$  , onda dužinu stranice manjeg kvadrata možemo izračunati primenom Pitagorine

teoreme:  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  . Jasno je da se opet radi o površinama.  $S_p$  je povoljna površina manjeg kvadrata, dok je celokupna površina  $S$ , površina većeg kvadrata:

$$P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{a^2 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2}$$

**PRIMER 3.**

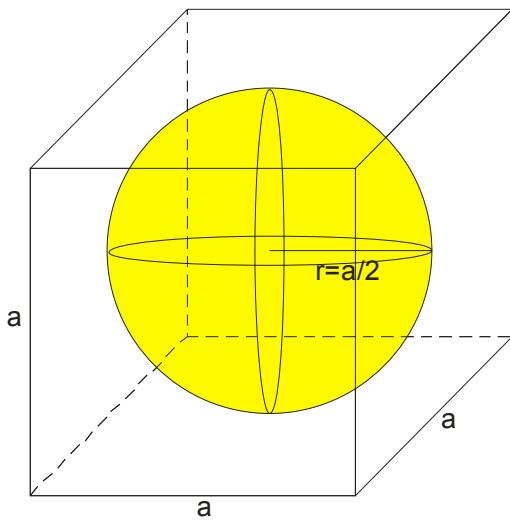
U datu kocku upisana je lopta. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka pripada i unutrašnjosti lopte.

**Rešenje:**

Događaj A: “ slučajno izabrana tačka je u unutrašnjosti lopte”

U ovom primeru ćemo računati odnos zapremina.

Nacrtajmo sliku i nađimo vezu između poluprečnika i dužine stranice kocke.



$S$  je zapremina kocke

$S_p$  (povoljna zapremina) je zapremina lopte poluprečnika  $\frac{a}{2}$ , koja je upisana u kocku.

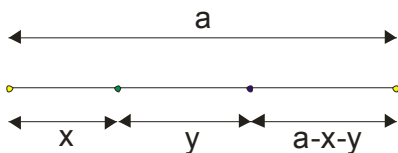
$$P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a^3} \cdot \pi}{\cancel{3} \cdot \cancel{a^3}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$$

**PRIMER 4.**

Duž dužine  $a$  podeljena je na tri dela. Odrediti verovatnoću da se od dobijenih delova može konstruisati trougao.

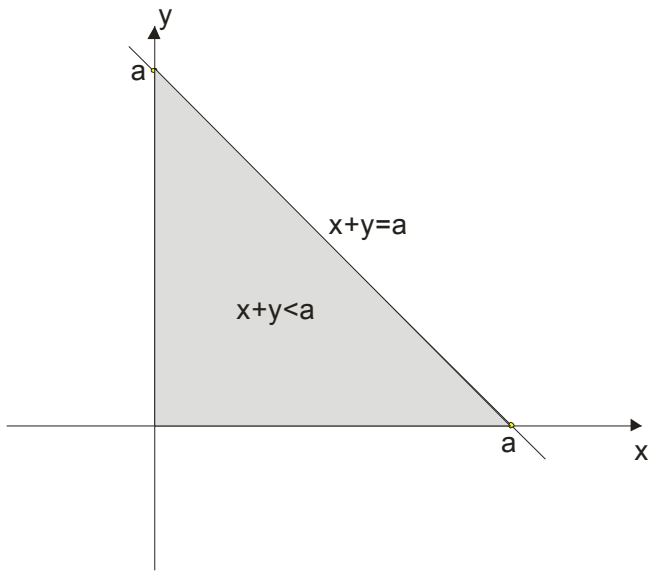
**Rešenje:**

Izdelimo najpre datu duž na proizvoljne delove:  $x$ ,  $y$ , i  $a-x-y$ .



Oblast  $S$  u ravni čine sve tačke čije koordinate zadovoljavaju jednakost:  $x + y < a$

Na slici bi to bilo:



Sad razmišljamo kako da dobijemo površinu  $S_p$  koja je nama povoljna.

**Znamo da za stranice trougla mora da važi teorema da je zbir dve stranice trougla veći od treće stranice!**

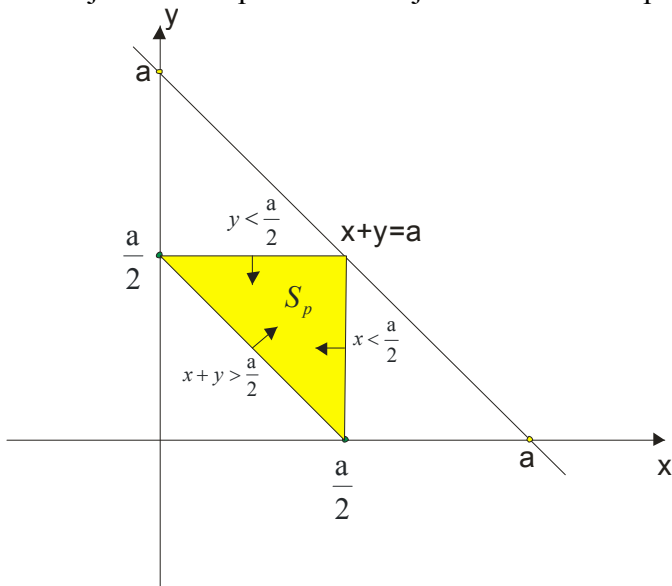
Stranice smo obeležili sa  $x$ ,  $y$ , i  $a-x-y$ , pa je dakle:

$$x + y > a - x - y \quad \text{odavde je} \quad \boxed{x + y > \frac{a}{2}}$$

$$x + (a - x - y) > y \quad \text{odavde je} \quad \boxed{y < \frac{a}{2}}$$

$$y + (a - x - y) > x \quad \text{odavde je} \quad \boxed{x < \frac{a}{2}}$$

Nacrtajmo ove tri prave na našoj slici i dobićemo površinu koja nam je povoljna:



Sad možemo naći i traženu verovatnoću:

A: “ od dobijenih delova se može konstruisati trougao”

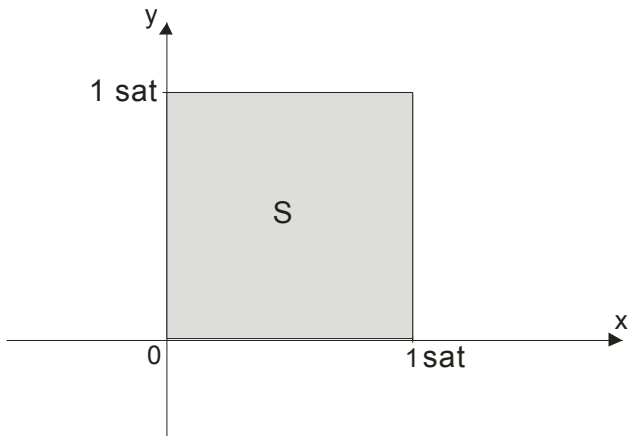
$$P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

**PRIMER 5.**

**Dve osobe zakazale su sastanak u toku jednog sata, na naznačenom mestu, uz obavezu čekanja 20 minuta ( $\frac{1}{3}$  sata) . Odrediti verovatnoću susreta ako je dolazak svake od osoba jednako moguć u proizvoljnom momentu naznačenog vremena.**

**Rešenje:**

Pošto su osobe zakazale susret u toku jednog sata, u ravni to možemo predstaviti kao površinu kvadrata stranice jedan.



$$S = P_{\text{kvadrata}} = 1^2 = 1$$

Označimo ovako:

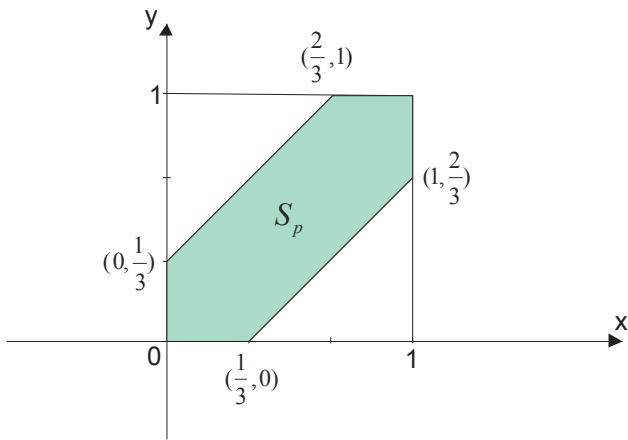
x - je trenutak dolaska prve osobe

y - je trenutak dolaska druge osobe

Kako je obaveza čekanja 20 min, to jest  $\frac{1}{3}$  sata, **mora da važi:**

$$x - y \leq \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad y - x \leq \frac{1}{3}$$

Nacrtrajmo ove dve prave i da vidimo koje oblasti zadovoljavaju nejednačine:



Površinu  $S_p$  ćemo dobiti kad od površine kvadrata oduzmemo površine ova dva pravouglata trouglića stranice  $\frac{2}{3}$

$$S_p = P_{\text{kvadrata}} - 2 \cdot P_{\text{trougla}} = 1^2 - 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

A: “susret osoba u toku 1 sata sa obavezom čekanja 20 min”

$$P(A) = \frac{S_p}{S} = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9} \approx 0,56$$

#### **PRIMER 6.**

**Dva broda moraju da stignu u jedno isto pristanište. Vreme dolaska obadva broda je nezavisno i jednako moguće u toku dana. Naći verovatnoću da će jedan od brodova morati čekati na oslobađanje pristaništa, ako je vreme zadržavanja prvog broda jedan, a drugog dva sata.**

#### **Rešenje:**

Obeležimo sa :

x - vreme dolaska prvog broda

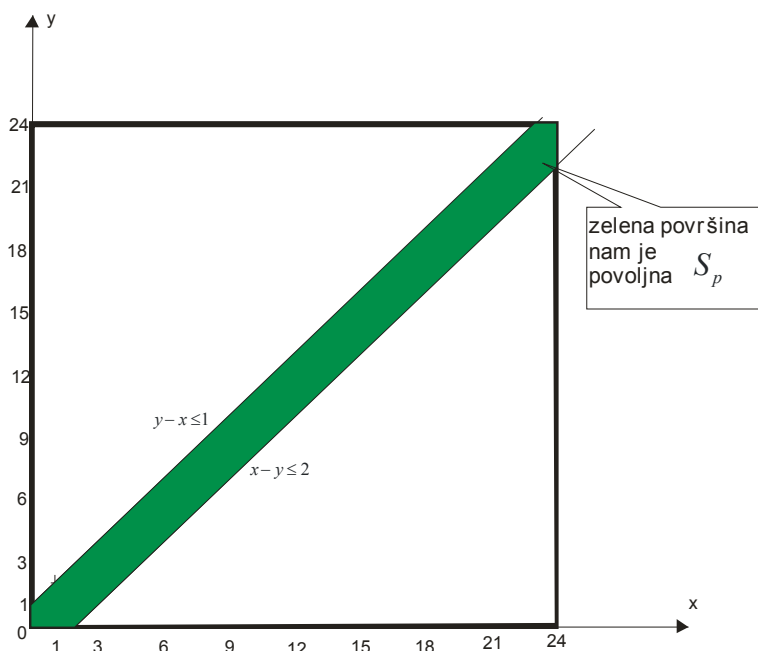
y - vreme dolaska drugog broda

Pošto u zadatku kaže da se radi o celom danu , to je  $0 \leq x \leq 24$  i  $0 \leq y \leq 24$  , odnosno , površina  $S$  je površina kvadrata sa stranicama 24.

$$S = P_{\text{kvadrata}} = 24^2 = 576$$

Iz podatka da je vreme zadržavanja prvog broda jedan a drugog dva sata , dobijamo dve nejednačine:

$y - x \leq 1$  i  $x - y \leq 2$ . Nacrtajmo ove dve prave na slici i uočimo koje oblasti zadovoljavaju nejednačine:



Slično kao i u prethodnom zadatku, površinu  $S_p$  ćemo dobiti kad od površine kvadrata oduzmemo površine ova dva

pravouga trougla, pa je:  $P(A) = \frac{S_p}{S} \approx 0,121$  gde je **A**: “ brod čeka na oslobađanje pristaništa ”

**PRIMER 7.**

**Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tetiva kružnice bude veća od stranice jednakostraničnog trougla koji je upisan u tu kružnicu. ( BERTRANDOV PARADOKS)**

**Rešenje:**

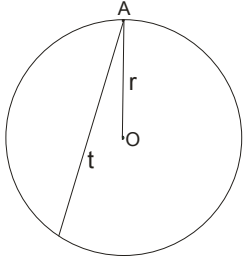
A: “ nasumice izabrana tetiva je duža od stranice upisanog jednakostraničnog trougla ”

Ovaj problem je zadao francuski matematičar Bertrand još davne 1889. godine i u matematici se po njemu i zove Bertrandov paradoks. Paradoks se sastoji u tome da se dobijaju **tri** različita rešenja zadatka, u zavisnosti od toga kako je povučena tetiva.

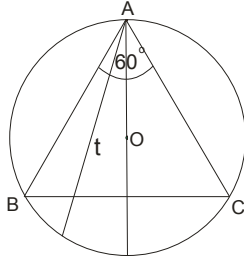
Posmatramo tri načina ( nasumičnog ) povlačenja tetive:

## I način ( fiksirana je jedna krajnja tačka tetive)

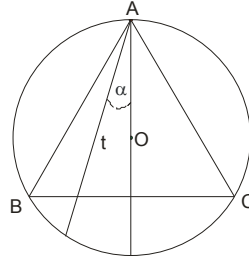
Na periferiji kruga proizvoljnog poluprečnika  $r$  uočimo tačku  $A$  i kroz nju povučemo tetivu u nasumice izabranom pravcu ( slika 1 ). Upišemo u dati krug jednakostranični trougao čije je jedno teme tačka  $A$ . Spojimo tačku  $A$  sa centrom kruga  $O$  ( može i da produžimo da bude ceo prečnik ), pogledajte sliku 2.



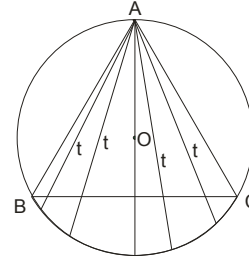
slika 1



slika 2



slika 3



slika 4

Označimo sa  $\alpha$  ugao koji tetiva gradi sa poluprečnikom  $AO$ . ( slika 3)

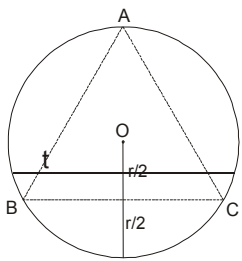
**Sad razmišljamo:** tetiva će biti duža od stranice trougla ako pravi uglove sa prečnikom do  $30^\circ$ . A kako to možemo izvesti sa obe strane ( slika 4 ), zaključujemo da su nama povoljni uglovi do  $60^\circ$ , to jest do  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ .

Ugao  $\alpha$  može da uzima sve vrednosti do  $180^\circ$ , to jest do  $\pi$ .

**Tražena verovatnoća je :**  $P(A) = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$

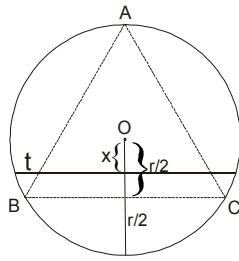
## II način ( ako je fiksiran pravac tetive)

Fiksiramo jedan pravac i povučemo nasumice tetivu kruga paralelno fiksiranom pravcu. Upišemo u krug jednakostraničan trougao ali tako da je jedna njegova stranica paralelna sa izabranim pravcem ( slika 1.)



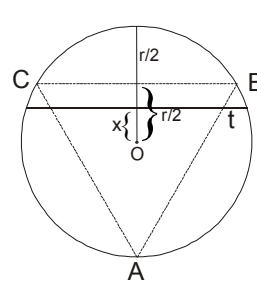
pravac p

slika 1.



pravac p

slika 2.



pravac p

slika 3.

Rastojanje stranice trougla od centra datog kruga je očigledno  $\frac{r}{2}$ . Obeležimo rastojanje tetive do centra sa  $x$  (slika 2.)

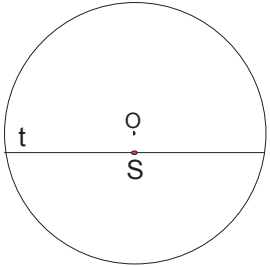
**Sad razmišljamo:** da bi tetiva bila duža od stranice trougla, njeno rastojanje mora biti kraće od  $\frac{r}{2}$ .

Istu situaciju imamo i ako okrenemo trougao (slika 3.), što nam govori da rastojanje  $x$  ide od 0 do  $r$ .

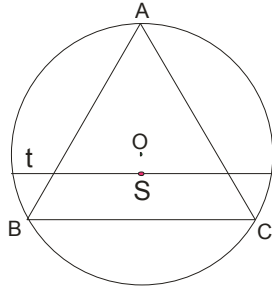
Tražena verovatnoća je u ovom slučaju  $P(A) = \frac{r}{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2}$

### **III način** ( znamo položaj središta tetive)

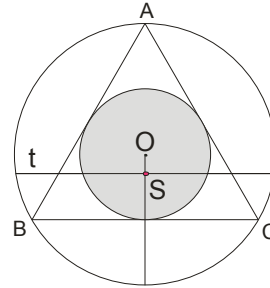
Izaberemo u krugu jednu tačku i kroz nju povučemo tetivu koja će biti prepolovljena tom tačkom( slika 1.)



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Upišemo jednakostraničan trougao da stranica bude paralelna sa tetivom( slika 2.)

**Sad razmišljamo:** tetiva će imati veću dužinu od stranice jednakostraničnog trougla ako i samo ako njeno središte leži unutar kruga koji je upisan u taj jednakostranični trougao! ( slika 3.)

Poluprečnik ovako upisanog kruga ( sivog) je  $\frac{r}{2}$  a površina  $\left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi = \frac{r^2 \pi}{4}$

Tražena verovatnoća je u ovom slučaju  $P(A) = \frac{\frac{r^2 \pi}{4}}{r^2 \pi} = \frac{1}{4}$

Kao što vidimo, u sva tri slučaja smo dobili različite verovatnoće, što predstavlja paradoks.

Objašnjenje za ovaj paradoks leži u činjenici da zadatak ( problem ) nije precizno formulisan !

Ovde se ustvari radi o tri različita zadatka, u zavisnosti od toga šta podrazumevamo pod pojmom proizvoljne tetive.

**Zato mi stalno ponavljamo da zadatke iz verovatnoće treba pažljivo čitati i polako proučavati uz odgovarajuću skicu problema...**