

## INVERZNA FUNKCIJA

Definišimo najpre bijektivno preslikavanje:

Za preslikavanje  $f: A \rightarrow B$  kažemo da je :

1) “jedan – jedan” (obostrano jednoznačno) , što skraćeno pišemo “ 1-1 “, ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2) “na” ako je  $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

3) **bijektivno** ako je “1-1” i “na”

Preslikavanje skupa  $A$  na sebe , u oznaci  $i_A$  , sa osobinom  $(\forall x \in A)(i_A(x) = x)$  naziva se identičkim (jediničnim) preslikavanjem skupa  $A$ .

**Ako je  $f: A \rightarrow B$  bijektivno preslikavanje, onda sa  $f^{-1}$  ožičavamo preslikavanje skupa  $B$  na skup  $A$ , koje ima osobinu da je  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_A$  . U tom slučaju  $f^{-1}$  nazivamo inverznim preslikavanjem preslikavanja  $f$ .**

*Postupak za rešavanje zadataka :*

i) *Umesto  $f(x)$  stavimo  $y$*

ii) *Odavde izrazimo  $x$  preko  $y$*

iii) *Izvršimo izmenu : umesto  $x$  pišemo  $f^{-1}(x)$  , a umesto  $y$  pišemo  $x$ .*

### Zadaci

1. Data je funkcija  $f(x) = 2x - 1$ . Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija  $f(x)$  i  $f^{-1}(x)$ .

Rešenje:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{Umesto } f(x) \text{ stavimo } y$$

$$y = 2x - 1 \quad \text{Odavde izrazimo } x \text{ preko } y$$

$$2x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{2} \quad \text{Izvršimo izmenu : umesto } x \text{ pišemo } f^{-1}(x) \text{ , a umesto } y \text{ pišemo } x.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \quad \text{i evo nam inverzne funkcije.}$$

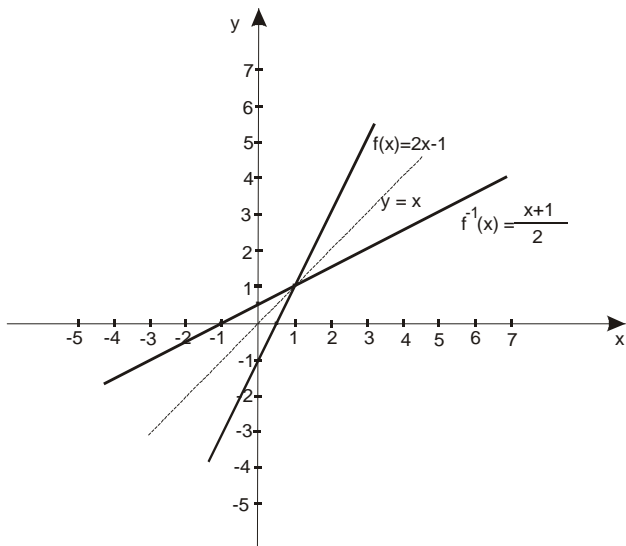
Pošto obe funkcije predstavljaju prave, uzećemo po dve proizvoljne tačke (prvo  $x = 0$ , pa  $y = 0$ ) i nacrtati ih.

$$f(x) = 2x - 1$$

x	0	1/2
f(x)	-1	0

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

x	0	-1
f <sup>-1</sup> (x)	1/2	0



**Primitimo da su grafici simetrični u odnosu na pravu  $y = x$ .**

2. Data je funkcija  $f(x) = \log_2(x-1)$ . Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija  $f(x)$  i  $f^{-1}(x)$ .

Rešenje:

$$f(x) = \log_2(x-1) \quad \text{Umesto } f(x) \text{ stavimo } y$$

$$y = \log_2(x-1) \quad \text{Oдавde izrazimo } x \text{ preko } y$$

$$x - 1 = 2^y$$

$$x = 2^y + 1 \quad \text{umesto } x \text{ pišemo } f^{-1}(x), \text{ a umesto } y \text{ pišemo } x$$

$$f^{-1}(x) = 2^x + 1 \quad \text{evo inverzne funkcije}$$

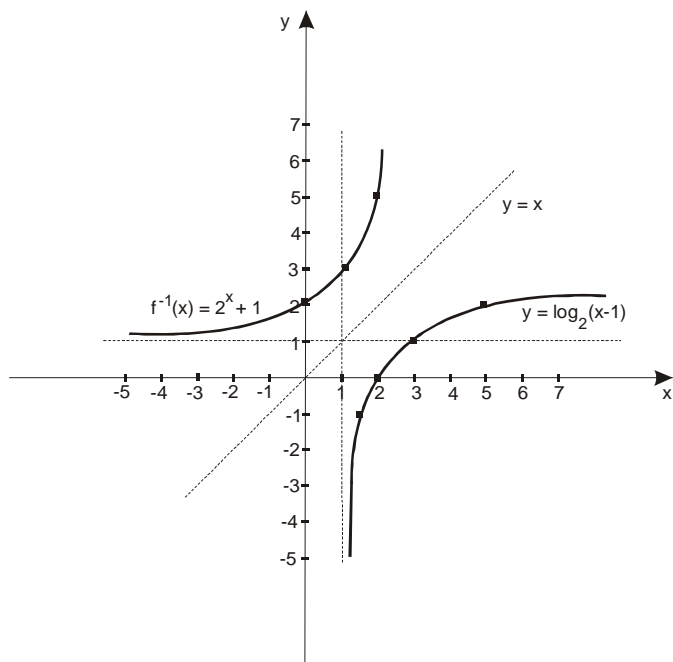
Skicirajmo sada grafike:

$f(x) = \log_2(x-1)$ . Ova funkcija je definisana za  $x-1 > 0$ , odnosno za  $x > 1$ , a to nam govori da je  $x = 1$  vertikalna asimptota sa leve strane. Uzmimo kao i malopre nekoliko proizvoljnih vrednosti i popunimo tablicu:

x	3/2	2	3	5
f(x)	-1	0	1	2

$f^{-1}(x) = 2^x + 1$ . Ova funkcija očigledno ne može imati vrednosti manje ili jednake sa 1, što nam govori da je 1 njena horizontalna asimptota. Uzmimo nekoliko proizvoljnih vrednosti i popunimo tablicu:

x	-1	0	1
$f^{-1}(x)$	3/2	2	3



Uočimo opet da su grafici simetrični u odnosu na pravu  $y = x$ .

3. Odredi inverznu funkciju funkcije  $f(x) = 3^x - 1$

Rešenje:

$$f(x) = 3^x - 1$$

$$y = 3^x - 1$$

$$3^x = y + 1$$

$$x = \log_3(y + 1)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3(x + 1)$$

---

4. Data je funkcija  $f(x) = x^2$ . Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija  $f(x)$  i  $f^{-1}(x)$ .

Rešenje:

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{y} \text{ pa je } f^{-1}(x) = \pm \sqrt{x}$$

**Nije bilo teško ovo rešiti, međutim ovo rešenje nije korektno ! Zašto?**

Moramo voditi računa o tome gde je funkcija rastuća, a gde opadajuća!

$f(x) = x^2$  je opadajuća za  $x < 0$  pa njoj odgovara opadajuća grana inverzne funkcije :  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$f(x) = x^2$  je rastuća za  $x > 0$  pa njoj odgovara rastuća grana inverzne funkcije :  $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$

E ovo sad je korektno rešenje!

---

5. Data je funkcija  $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . Odrediti  $f^{-1}(x)$ .

Rešenje:

$$f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 2^y$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2^y - x \quad \text{kvadriramo ...}$$

$$x^2 + 1 = 2^{2y} - 2x \cdot 2^y + x^2 \quad \text{potiremo } x^2 \dots$$

$$2x \cdot 2^y = 2^{2y} - 1$$

$$x = \frac{2^{2y} - 1}{2^{y+1}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{2x} - 1}{2^{x+1}} \text{ a ovo možemo malo da prisredimo ...}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{2x} - 1}{2^{x+1}} = \frac{2^{2x} - 1}{2^x \cdot 2} = \frac{\frac{2^{2x}}{2^x} - \frac{1}{2^x}}{2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$


---

6. Data je funkcija  $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ . Odrediti  $f^{-1}(x)$

Rešenje:

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}} \quad \text{Ovo sve ide na treći stepen.}$$

Podsetimo se najpre formule :

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + 3AB(A+B) + B^3$$

$$y^3 = x + \sqrt{1+x^2} + 3\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}} (\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}) + x - \sqrt{1+x^2}$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{(x + \sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2})} y$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{x^2 - 1 - x^2} y$$

$$y^3 = 2x - 3y$$

$$2x = y^3 + 3y$$

$$x = \frac{y^3 + 3y}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3x}{2}$$

