

GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA: (teorijske napomene)

Posmatrajmo skup $A \subseteq R$

Tačka a je **tačka nagomilavanja** skupa A ako u svakoj njenoj okolini postoji bar jedna tačka skupa A različita od a .

Neka je $A \subseteq R$ i $a \in \bar{R}$ tačka nagomilavanja skupa A . Kažemo da funkcija $f: A \rightarrow R$ ima **graničnu vrednost** $b \in \bar{R}$ u tački a ako za svaki niz $\{x_n\}_{n \in N}$ za koji je $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ važi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Tada pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Ova definicija poznata je kao Hajneova. Sledeću definiciju dao je Koši: Neka je $A \subseteq R$ i $a \in \bar{R}$ tačka nagomilavanja skupa A . kažemo da je $b \in \bar{R}$ granična vrednost funkcije $f: A \rightarrow R$ u tački a i pišemo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ako za svaku okolinu $U(b)$ tačke b postoji okolina $U(a)$ tačke a tako da važi implikacija $(\forall x \in A \setminus \{a\})(x \in U(a) \Rightarrow f(x) \in U(b))$. Naravno, ove dve definicije su ekvivalentne. Kažemo da funkcija f ima beskonačnu graničnu vrednost $+\infty(-\infty)$ u tački $a \in R$ ako za proizvoljno veliki broj $M > 0$ (proizvoljno mali broj $M < 0$) postoji $\delta > 0$ tako da važi:

$$(\forall x \in A \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M) \\ \text{i } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Odnosno:

$$(\forall x \in A \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M) \\ \text{i } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Ako funkcija f ima graničnu vrednost u tački a , onda je ta granična vrednost jednoznačno određena. Neka je

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ gde je $a \in R$ i $b, c \in R$ tada je:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha b$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, c \neq 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k = b^k, k \in \mathbb{Q}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$$

Neke važne granične vrednosti:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \text{ to jest: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ to jest: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Lopitalovo pravilo:

Ako se pri izračunavanju granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ javi neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ tada koristimo pravilo

Lopitala (naravno, $f(x)$ i $g(x)$ su diferencijabilne u tački $x = a$ i njoj okolini, i $g'(a) \neq 0$). Tada je:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{ako opet dobijemo oblik } \frac{0}{0} \text{ ili } \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \text{itd.}$$

PAZI: Ne radi se izvod količnika već posebno izvod gore, posebno izvod dole.

Određeni izrazi su:

$$\rightarrow \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\rightarrow \infty + \infty = \infty$$

$$\rightarrow k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$$

$$\rightarrow \frac{A}{\infty} = 0 \quad (A \text{ je neki broj})$$

$$\rightarrow \frac{A}{0} = \infty \quad (A \text{ je neki broj})$$

Neodredjeni izrazi (koji se najčešće javljaju) su:

$$\rightarrow \infty - \infty = ?$$

$$\rightarrow 0 \cdot \infty = ?$$

$$\rightarrow \frac{\infty}{\infty} = ?$$

$$\rightarrow \frac{0}{0} = ?$$