

1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

Oblast definisanosti (domen)

Ova funkcija je svuda definisana jer nema razlomaka a treći korern je svuda definisan... $D_f = (-\infty, \infty)$

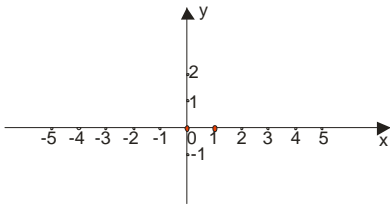
Ovo nam govori da nema vertikalne asimptote.

Nule funkcije

$$y = 0 \rightarrow x^2 - x^3 = 0 \rightarrow x^2(1-x) = 0$$

$$x = 0; x = 1$$

X osu grafik seče u dvema tačkama:



Znak funkcije

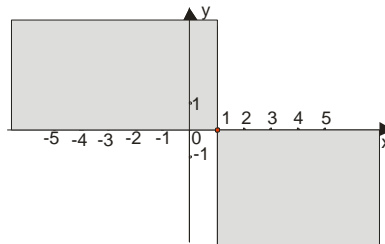
Kao i uvek, najpre razmišljamo od čega zavisi znak funkcije?

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$$

Samo od $1-x$, pa je

	$-\infty$	1	∞
$1-x$	+	-	
y	+	-	

na skici je to



Parnost i neparnost

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 - (-x)^3} = \sqrt[3]{x^2 + x^3}$$

Funkcija nije ni parna ni neparna!

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ lakše nam je da tražimo izvod ako funkciju posmatramo kao

$$y = (x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2 - x^3)'$$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 3x^2)$$

$$y' = \frac{1}{3} \frac{2x - 3x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - x^3)^2}}$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(2 - 3x) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

Za $x = 0$

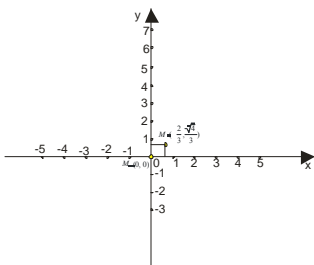
$$y = \sqrt[3]{0 - 0} = 0$$

Za $x = \frac{2}{3}$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{4}{9} - \frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{4}{27}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

Dakle:

$$M_1(0, 0); M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$$



Od čega nam zavisi znak prvog izvoda ?

Pa samo od izraza u brojiocu! $x(2-3x)$

	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	∞
x	-	+	+	
2-3x	+	+	-	
y'	-	+	-	
		↘ ↗	↘	

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 3x^2) \quad \text{radimo kao izvod proizvoda}$$

$$y'' = \frac{1}{3} \left[\left((x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \right)' \cdot (2x - 3x^2) + (x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 3x^2)' \right]$$

$$y'' = \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3}(x^2 - x^3)^{-\frac{5}{3}} \cdot (2x - 3x^2) \cdot (2x - 3x^2) + (x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 - 6x) \right]$$

Posle pažljivog sredjivanja dobijamo da je

$$y'' = \frac{1}{3} \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}}$$

Odavde možemo zaključiti da nema prevojnih tačaka i da je uvek $y'' < 0$, pa je funkcija konkavna na celom domenu (mršti se).

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Kao što smo već zaključili, funkcija nema vertikalnu asimptotu!

Horizontalna asimptota

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = \infty \cdot (-1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = -\infty \cdot (-1) = +\infty$$

Dakle, nemamo horizontalnu asimptotu pa moramo potražiti kosu.

Kosa asimptota

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = 0 - 1 = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

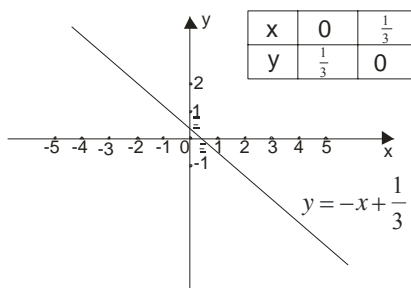
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x] \quad \text{ovde moramo racionalisati, upotrebljavamo: } A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x) \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^2 - x^3})^2 - \sqrt[3]{x^2 - x^3} \cdot x + x^2}{(\sqrt[3]{x^2 - x^3})^2 - \sqrt[3]{x^2 - x^3} \cdot x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x^2 - x^3})^3 + x^3}{(\sqrt[3]{x^2 - x^3})^2 - \sqrt[3]{x^2 - x^3} \cdot x + x^2}$$

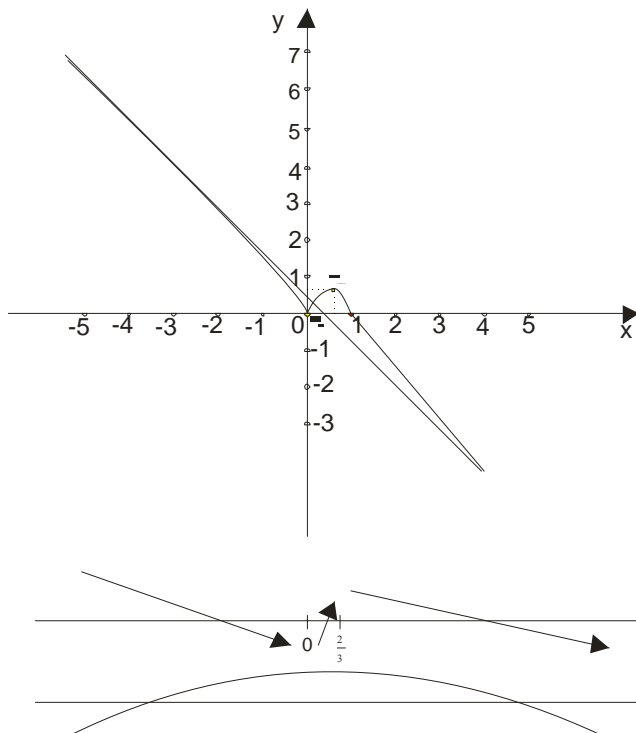
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{x^4 - 2x^5 + x^6} - \sqrt[3]{x^3(1 - \frac{1}{x})} \cdot x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1)} - x \cdot \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{x})} \cdot x + x^2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 [\sqrt[3]{(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1)} - \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{x})} + 1]} = \frac{1}{1 - (-1) + 1} = \frac{1}{3}$$

$y = -x + \frac{1}{3}$ je kosa asimptota



I konačno:



1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$

Oblast definisanosti (domen)

Ovde moramo posmatrati dva uslova:

$$\sqrt{x^2+2} \neq 0 \quad \text{i} \quad x^2+2 \geq 0$$

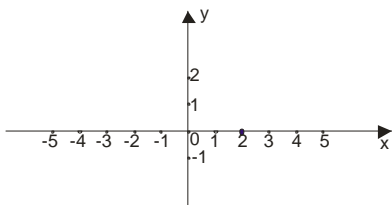
Ovo sklopljeno u jedan uslov daje $x^2+2 > 0$

A ovo je očigledno tačno za svako realno x , pa je $D_f = (-\infty, \infty)$

A odavde zaključujemo da funkcija nema vertikalne asimptote.

Nule funkcije

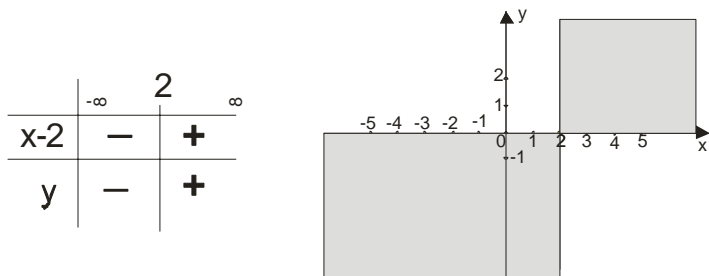
$$y=0 \quad \text{za} \quad x-2=0, \quad \text{to jest} \quad x=2$$



Znak funkcije

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

Kako je izraz u imeniocu uvek pozitivan, zaključujemo da znak zavisi samo od brojioca...



Parnost i neparnost

$$f(-x) = \frac{-x-2}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{-x-2}{\sqrt{x^2+2}} \neq f(x)$$

Funkcija nije ni parna ni neparna.

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{(x-2) \cdot \sqrt{x^2+2} - (\sqrt{x^2+2}) \cdot (x-2)}{(\sqrt{x^2+2})^2} \quad \text{pazi, } \sqrt{x^2+2} \text{ mora kao složena funkcija...}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot (x^2+2) \cdot (x-2)}{x^2+2}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+2} - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}} \cdot \cancel{2}x \cdot (x-2)}{x^2+2}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x(x-2)}{\sqrt{x^2+2} \cdot (x^2+2)}$$

$$y' = \frac{x^2+2 - x^2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{2+2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

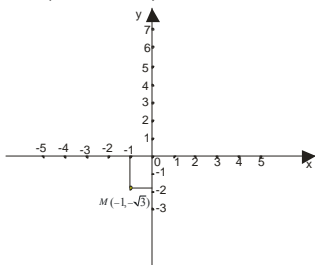
$$y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} \quad \text{ili ako odmah pripreмимо za drugi izvod } y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'=0 \text{ za } x+1=0, \text{ to jest } x=-1$$

Za $x=-1$

$$y = \frac{-1-2}{\sqrt{1+2}} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$M(-1, -\sqrt{3})$



Znak prvog izvoda zavisi samo od izraza u brojiocu, pa je :

	$-\infty$	-1	∞
$2x+2$	-	+	
y'	-	+	

tačka M minimum funkcije.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'' = 2 \frac{(x+1) \cdot (x^2+2)^{\frac{3}{2}} - ((x^2+2)^{\frac{3}{2}})' \cdot (x+1)}{((x^2+2)^{\frac{3}{2}})^2}$$

$$y'' = 2 \frac{1 \cdot (x^2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{3}{2}-1} (x^2+2)' \cdot (x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y'' = 2 \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot (x+1)}{(x^2+2)^3}$$

$$y'' = 2 \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot x \cdot (x+1)}{(x^2+2)^3} \quad \text{izvučemo zajednički } (x^2+2)^{\frac{1}{2}} \text{ u brojiocu}$$

$$y'' = 2 \frac{\cancel{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}} [x^2+2-3x \cdot (x+1)]}{(x^2+2)^{\cancel{\frac{1}{2}}+3}}$$

$$y'' = 2 \frac{x^2+2-3x^2-3x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y'' = 2 \frac{-2x^2-3x+2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y'' = 0$$

$$-2x^2-3x+2=0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = \frac{1}{2}$$

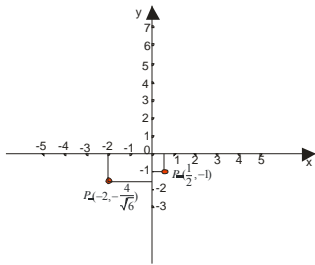
$$\text{Za } x_1 = -2 \rightarrow y_1 = \frac{-4}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Za } x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow y_2 = -1$$

Imamo dve prevojne tačke:

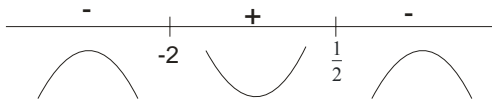
$$P_1(-2, \frac{-4}{\sqrt{6}})$$

$$P_2(\frac{1}{2}, -1)$$



Znak drugog izvoda opet zavisi samo od izraza u brojiocu $-2x^2 - 3x + 2$.

Upotrebićemo da kvadratni trinom ima znak broja $a = -2$ svuda osim između nula!



Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna asimptota ne postoji.

Horizontalna asimptota

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} \text{ PAZI ! Pošto smo dole dobili apsolutnu vrednost,}$$

moramo odvojiti limese za + i za - beskonačno!

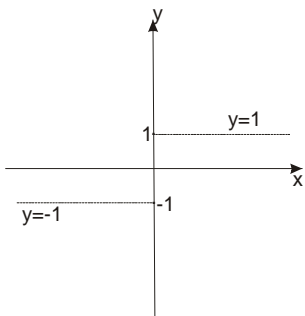
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -1$$

KAĐ X TEŽI + BESKONAČNO HORIZONTALNA ASIMPTOTA JE $y = 1$

KAĐ X TEŽI - BESKONAČNO HORIZONTALNA ASIMPTOTA JE $y = -1$

Na slici bi to izgledalo ovako:



Kose asimptote naravno nema, jer postoji horizontalna!

Konačan grafik je :

