

FUNKCIONALNE JEDNAČINE

Postupak rešavanja:

- i) “ Ono “ što je u zagradi stavimo da je t (smena)
- ii) Odatle izrazimo x
- iii) Vratimo se u početnu jednačinu , $f (t) = \dots$ i gde vidimo x zamenimo ga sa onim što smo izrazili
- iv) Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po t ” i **zamenimo t sa x**

ZADACI

1) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f (x+1) = x^2 - 3x + 2$

Rešenje:

$$f (x+1) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{“ Ono “ što je u zagradi stavimo da je } t$$

$$x + 1 = t \quad \text{Odatle izrazimo } x$$

$$x = t - 1 \quad \text{Vratimo se u početnu jednačinu , } f (t) = \dots \text{ i gde vidimo } x \text{ zamenimo ga sa onim što smo izrazili}$$

$$f (t) = (t - 1)^2 - 3 (t - 1) + 2$$

$$f (t) = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2 \quad \text{Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po } t \text{ ”}$$

$$f (t) = t^2 - 5t + 6 \quad \text{zamenimo } t \text{ sa } x$$

$$f (x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{i evo konačnog rešenja date funkcionalne jednačine.}$$

2) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f \left(\frac{1}{x} \right) = x + \sqrt{1 + x^2}$

Rešenje:

$$f \left(\frac{1}{x} \right) = x + \sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{x} = t \quad \text{pa je odavde } \frac{1}{t} = x \quad \text{ovo zamenimo u datoj jednačini}$$

$$f (t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}$$

$$f(t) = \frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t} \quad \text{zamenimo } t \text{ sa } x \quad f(x) = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad \text{je konačno rešenje}$$

3) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$$

$$\frac{x}{x+1} = t$$

$$x = t(x+1)$$

$$x = tx + t$$

$x - tx = t$ izvučemo x kao zajednički na levoj strani...

$$x(1 - t) = t$$

$$x = \frac{t}{1-t} \quad \text{vratimo se sad na početnu jednačinu...}$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \quad \text{zamenimo } t \text{ sa } x \dots \quad f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \quad \text{je konačno rešenje}$$

4) Reši funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x+3$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x+3$$

$$\frac{x+2}{2x+1} = t$$

$$x + 2 = t(2x + 1)$$

$$x + 2 = 2tx + t$$

$$x - 2tx = t - 2$$

$$x(1 - 2t) = t - 2$$

$$x = \frac{t - 2}{1 - 2t}$$

$$f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x + 3$$

$f(t) = 5 \frac{t-2}{1-2t} + 3$ sredimo... $f(t) = \frac{5t-10}{1-2t} + \frac{3(1-2t)}{1-2t} = \frac{5t-10+3-6t}{1-2t} = \frac{-t-7}{1-2t}$ izvučemo minus gore i ubacimo ga u imenilac, koji onda promeni redosled ... $A - B = -(B - A)$

$$f(t) = \frac{t+7}{2t-1}$$

$f(x) = \frac{x+7}{2x-1}$ je konačno rešenje

5) Ako je $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, izračunati $f(3)$.

Rešenje:

Najpre moramo naći $f(x)$.

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$$

$$\frac{x}{x+1} = t$$

$$x = t(x+1)$$

$$x = tx + t$$

$$x - tx = t$$

$$x(1-t) = t$$

$x = \frac{t}{1-t}$ vraćamo se u početnu jednačinu...

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t} - 1\right)^2 \quad \text{Sada umesto } t \text{ stavljamo } 3 \text{ jer se traži } f(3)\dots$$

$$f(3) = \left(\frac{3}{1-3} - 1\right)^2 = \frac{25}{4}$$

6) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Rešenje:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{uzimamo smenu } x + \frac{1}{x} = t, \text{ ako odavde probamo da izrazimo } x \text{ kao što bi trebalo,}$$

zapadamo u probleme...

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \text{sve pomnožimo sa } x \dots$$
$$x^2 + 1 = xt$$

$$x^2 - xt + 1 = 0 \quad \text{ovo je kvadratna po } x \text{ i ne vodi rešenju...}$$

TRIK : OVDE SMENU TREBAMO KVADRIRATI

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \text{kvadriramo...}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$$

$$x^2 + 2x \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2 \quad \text{pokratimo } x\text{-seve...}$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \quad \text{E sad se vratimo u datu početnu jednačinu...}$$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{pa je } f(t) = t^2 - 2 \text{ odnosno } f(x) = x^2 - 2 \text{ je konačno rešenje}$$

7. Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$$

I ovaj zadatak ne možemo uraditi "klasično" već se moramo poslužiti trikom...

Ako uzmemo smenu $\frac{x-2}{x+1} = t$, onda je $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{t}$ i

$$\frac{x-2}{x+1} = t \text{ odavde } x-2 = t(x+1) \text{ pa je } x-2 = tx+t, \quad x-tx = t+2, \quad x(1-t) = t+2 \text{ i odavde je } x = \frac{t+2}{1-t}$$

Vratimo se u datu jednačinu:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{t+2}{1-t} \text{ dobili smo jednu jednačinu...E sad je trik da umesto } t \text{ stavimo } \frac{1}{t}$$

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t} + 2}{1 - \frac{1}{t}} = \frac{\frac{1+2t}{t}}{\frac{t-1}{t}} = \frac{1+2t}{t-1} \text{ dobismo i drugu jednačinu}$$

Sada pravimo sistem od dve jednačine:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{t+2}{1-t}$$

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 pa saberemo ove dve jednačine...

$$-4f(t) - 2f\left(\frac{1}{t}\right) = -2 \frac{t+2}{1-t}$$

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}$$

$$-3f(t) = \frac{-2t-4}{1-t} + \frac{1+2t}{t-1} = \frac{2t+4}{t-1} + \frac{1+2t}{t-1} = \frac{4t+5}{t-1} \text{ dakle}$$

$-3f(t) = \frac{4t+5}{t-1}$ podelimo sve sa -3 i dobijamo

$f(t) = \frac{4t+5}{-3(t-1)}$ odnosno $f(t) = \frac{4t+5}{3-3t}$ umesto t stavimo x i dobijamo:

$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$ konačno rešenje