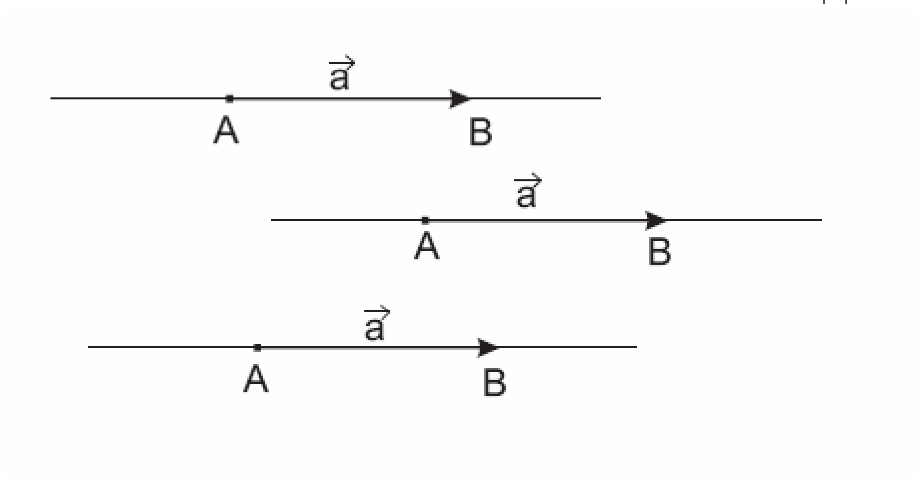
VEKTORI U RAVNI

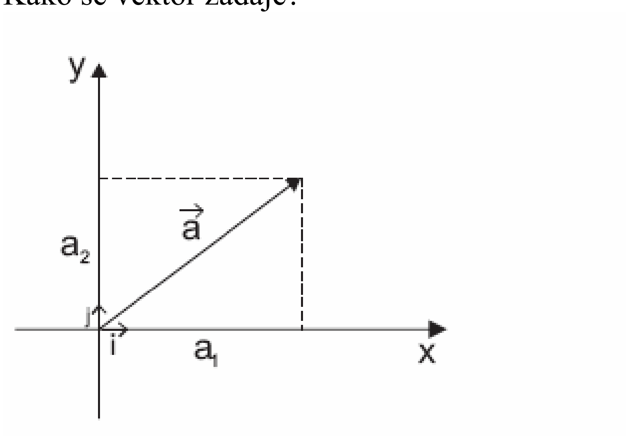
Najjednostavnije rečeno, **vektori su usmerene duži.**
Osnovne karakteristike vektora su :
- **pravac**
- **smer**
- **intenzitet**
- **početak i kraj vektora**

Pravac vektora je prava na kojoj se on nalazi ali i sve prave paralelne sa njom, što vektoru dozvoljava da "skače" sa jedne na drugu paralelnu pravu.
Smer vektora se zadaje strelicom.
Intenzitet vektora je njegova dužina i najčešće se obeležava sa $|\vec{a}|$



A je početak a B je kraj vektora . Obeležava se $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

Kako se vektor zadaje?



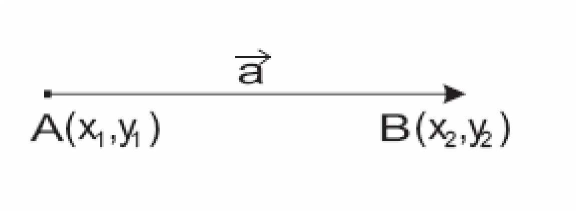
$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ ili jednostavnije $\vec{a}=(a_1,a_2)$ a intenzitet je $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\vec{i}$ i $\vec{j}$ su jedinični vektori (ortovi) koji služe za izražavanje drugih vektora.

$\vec{i}=(1,0)$ i intenzitet ovog vektora je $|\vec{i}|=1$

$\vec{j}$=(0,1) i takodje je $|\vec{j}|$=1

Kako izraziti vektor ako su date koordinate njegovog početka i kraja?



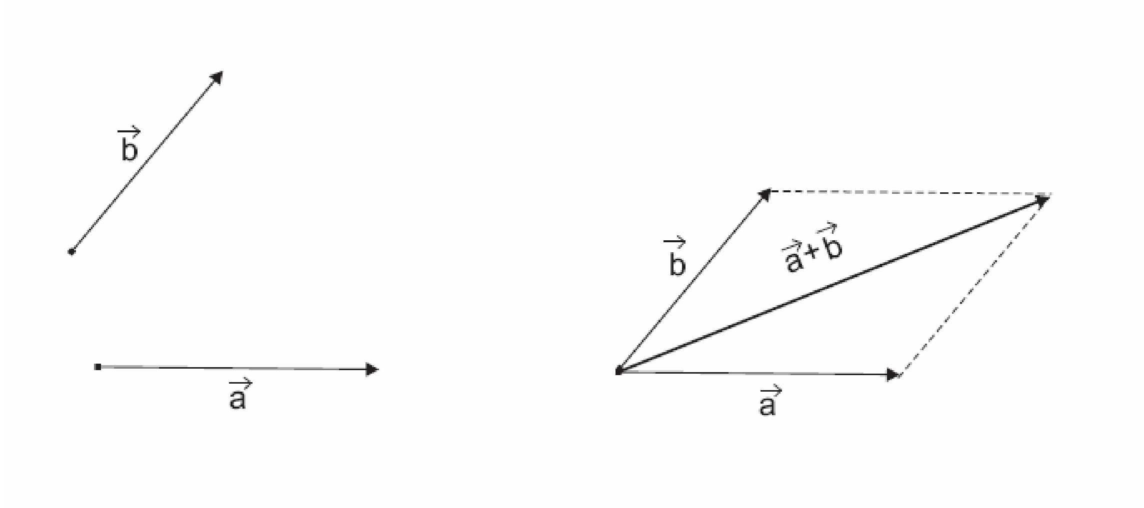
$\vec{a}$=(x_2-x_1, y_2-y_1)   i njegov intenzitet je onda $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Sabiranje i oduzimanje vektora

Za sabiranje i oduzimanje vektora imamo dva pravila:

1) Pravilo paralelograma

Dva data vektora dovedemo na zajednički početak paralelnim pomeranjem.Nad njima kao stranicama oformimo paralelogram. Dijagonala paralelograma je njihov zbir (ona dijagonala koja polazi iz sastava ta dva vektora).

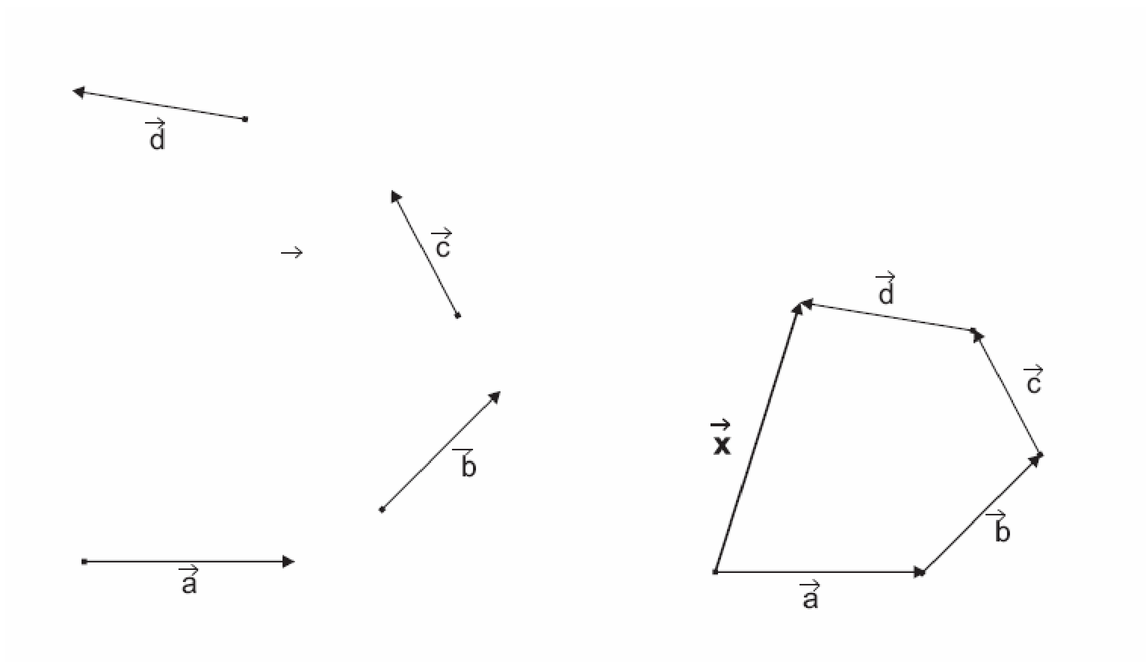


2) Pravilo poligona (nadovezivanja)

Na kraj prvog vektora paralelnim pomeranjem dovedemo početak drugog, na kraj drugog dovedemo početak trećeg vektora......

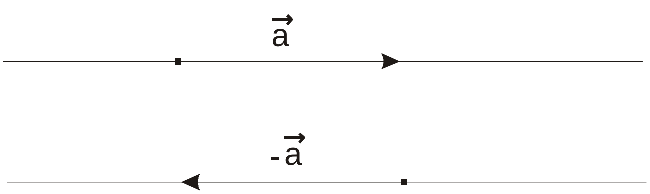
Rezultanta (njihov zbir) je vektor koji spaja početak prvog i kraj zadnjeg vektora.

Evo to na slici:



Naš predlog je da uvek upotrebljavate pravilo nadovezivanja.

Svaki vektor ima svoj **suprotan vektor**, koji ima isti pravac i intenzitet ali suprotan smer sa početnim vektorom.

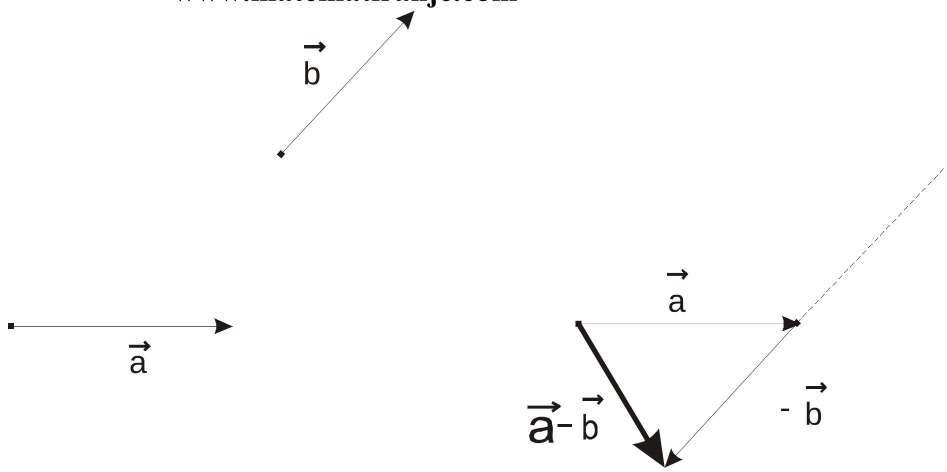


$-\vec{a}+\vec{a}=0$ i $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

Nula vektor $\vec{0}$ je onaj čiji se početak i kraj poklapaju.

Kako oduzeti dva vektora?

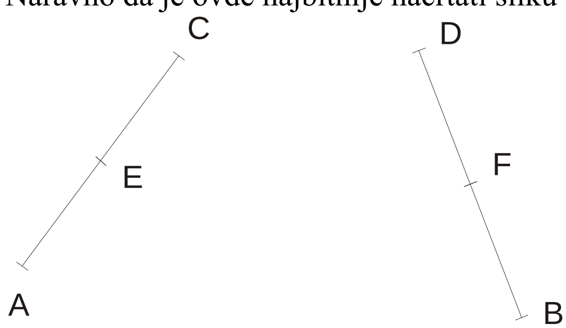
Recimo da su dati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$,.Postupak je sličan kao kod sabiranja vektora(pravilo nadovezivanja) samo što umesto vektora $+\vec{b}$ na kraj prvog nanosimo - $\vec{b}$.



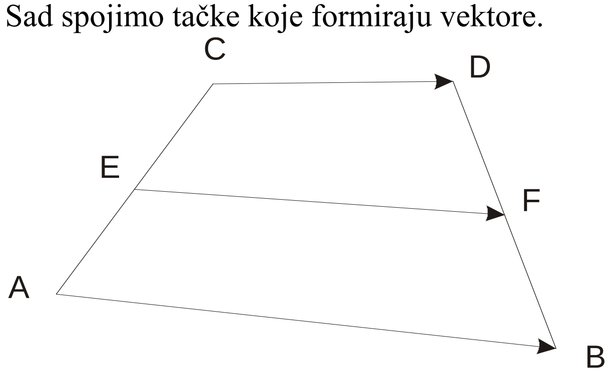
Primer:

1) Date su duži AC i BD. Tačke E i F su sredine ove dve duži. Dokazati da je : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{EF}$

Naravno da je ovde najbitnije nacrtati sliku i sa nje uraditi zadatak!



Sad spojimo tačke koje formiraju vektore.



Ideja je da se vektor $\overrightarrow{EF}$ izrazi na obe strane pa se te jednakosti saberu!

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\\ \overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\end{aligned}\right\}\ +$$

$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ jer su vektori EA i EC suprotni , pa se skrate a takođe su suprotni i vektori BF DF pa se i oni skrate.

Računski sabiranje i oduzimanje vektora ide vrlo lako:

Ako je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ to jest $\vec{a}$=(a_1,a_2) i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, to jest $\vec{b}$=(b_1,b_2)

$\vec{a}+\vec{b}$=(a_1,a_2) + (b_1,b_2)= (a_1+b_1,a_2+b_2)

$\vec{a}$ - $\vec{b}$=(a_1,a_2) - (b_1,b_2)= (a_1-b_1,a_2-b_2)

Dakle, radimo tako što saberemo (oduzmemo) koordinatu sa koordinatom.

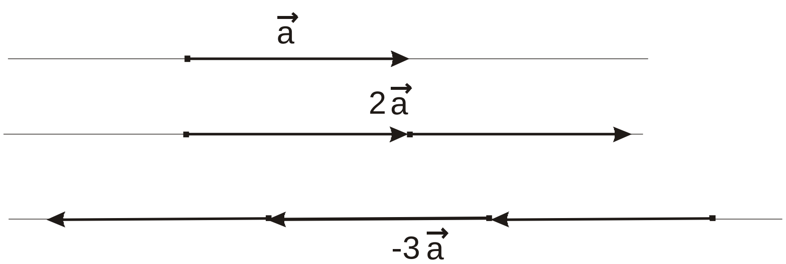
Množenje vektora skalarom (brojem)

Proizvod skalara k i vektora $\vec{a}$ je vektor k$\vec{a}$ (ili $\vec{a}$k) koji ima isti pravac kao vektor $\vec{a}$, intenzitet $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$ i smer:

- isti kao vektor $\vec{a}$ ako je k>0
- suprotan od vektora $\vec{a}$ ako je k<0

Primer: Dat je vektor $\vec{a}$, nadji : 2$\vec{a}$ i -3$\vec{a}$

Rešenje:



Svaki vektor $\vec{a}$ se može predstaviti u obliku $\vec{a} = |\vec{a}|\overrightarrow{a_0}$, gde je $\overrightarrow{a_0}$ jedinični vektor vektora $\vec{a}$.

Linearna zavisnost vektora

Ako su k_1,k_2,…,k_n realni brojevi i $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$,…, $\overrightarrow{x_n}$ vektori različiti od nule, onda se zbir:

$$k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{x_n}$$

zove **linearna kombinacija** vektora $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$,…, $\overrightarrow{x_n}$

Izjednačimo ovu linearnu kombinaciju sa nulom:

$$k_1\overrightarrow{x_1}+k_2\overrightarrow{x_2}+\ldots+k_n\overrightarrow{x_n}=0$$

i) Ako je $k_1=k_2=\ldots=k_n$, onda su vektori $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\ldots,\overrightarrow{x_n}$ **linearno nezavisni**

ii) Ako je bar jedan od $k_1,k_2,\ldots,k_n$ različit od nule onda su vektori $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\ldots,\overrightarrow{x_n}$ **linearno zavisni**

Važi još:

Dva vektora su **kolinearna** ako i samo ako su linearno zavisni.(kolinearni znači da leže na istoj pravoj)

Vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ su **komplanarni** ako i samo ako su linearno zavisni(komplanarni znači da leže u istoj ravni)

Razlaganje vektora na komponente

Ako su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ linearno nezavisni vektori jedne ravni, onda za svaki vektor $\vec{z}$ te ravni ,postoje jedinstveni brojevi p i q takvi da je :

$$\vec{z}=p\vec{x}+q\vec{y}$$

Primer:

Vektor $\vec{v}$=(4,2) razložiti po vektorima $\vec{a}$=(2,-1) i $\vec{b}$= (-4,3)

Rešenje:

$\vec{v}=p\vec{a}+q\vec{b}$

(4,2) = p(2,-1) + q(-4,3)
(4,2) = (2p,-p) + (-4q,3q)

Odavde pravimo sistem:

4=2p – 4q
2=-p + 3q

2p –4q = 4
-p + 3q = 2

p – 2q = 2
-p+3q = 2

q = 4

2p-4q = 4 , pa je 2p – 16 = 4 , pa 2p = 20 i konačno p = 10 .

Dakle, razlaganje vektora je $\vec{v} = \mathbf{10}\vec{a} + \mathbf{4}\vec{b}$

Skalarni proizvod dva vektora (o)

$$\vec{a} \text{ o } \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Ako je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ to jest $\vec{a}=(a_1,a_2)$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, to jest $\vec{b}=(b_1,b_2)$

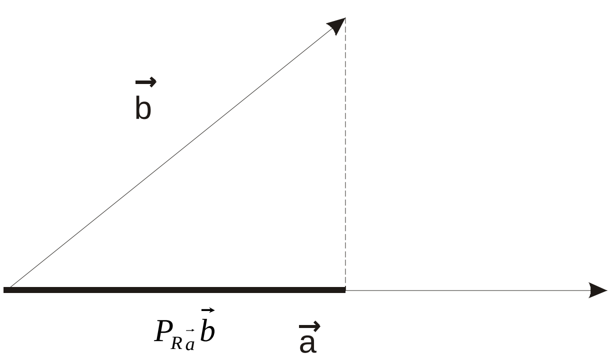
$$\vec{a} \text{ o } \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Ugao između dva vektora se računa :

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a} \text{ o} \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Projekcija vektora : $P_{R_{\vec{a}}}\vec{b}$ je projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$ i obrnuto :

$P_{R_{\vec{b}}}\vec{a}$ je projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$



$$P_{R_{\vec{a}}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \text{ o} \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad \text{i} \quad P_{R_{\vec{b}}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \text{ o} \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Za skalarni proizvod važe osobine:

1) $\vec{a} \text{ o } \vec{b} = 0$ nam govori da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni (ili da je jedan od njih nula), pa ovo možemo uzeti kao uslov normalnosti dva vektora

2) Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori onda je $\vec{a} \circ \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$

3) $\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ovo je vrlo važna osobina

4) $|\vec{a} \circ \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

5) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

6) $k(\vec{a} \circ \vec{b}) = (k\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (k\vec{b})$

7) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{x} = \vec{a} \circ \vec{x} + \vec{b} \circ \vec{x}$

Primer:

Izračunati intenzitet zbira vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3$ i ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\angle(\vec{a}.\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

Rešenje: $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3$ i $\angle(\vec{a}.\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ a mi tražimo $|\vec{a} + \vec{b}| = ?$

Nađimo najpre $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$

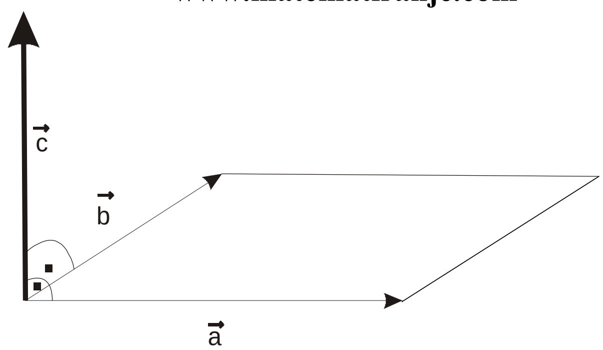
$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(a,b) + |\vec{b}|^2$$

$$= 5^2 + 2*5*3\cos 60^0 + 3^2$$

$$= 25 + 15 + 9 = 49$$

Dakle $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 49$ pa je $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{49} = 7$

Vektorski proizvod $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



1) Vektor c je normalan i na vektor a i na vektor b

2) Intenzitet vektora c je brojno jednak površini paralelograma nad vektorima a i b

3) Vektor c se odredjuje pravilom desnog triedra(desnog zavrtnja)

Intenzitet vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ je: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

Osobine vektorskog proizvoda:

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (alternacija)

2) $l(\vec{a}\times\vec{b}) = (l\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(l\vec{b})$

3) $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}$

Primer:

Ako je $\left|\vec{a}\right| = 10, \left|\vec{b}\right| = 2$ i $\vec{a}\,\mathrm{o}\,\vec{b} = 12$ izračunaj $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ?$

Iz $\vec{a}\,\mathrm{o}\,\vec{b} = 12$ imamo $\vec{a}\ \mathrm{o}\ \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 12$

$$20\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 12$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Obeležimo ugao između vektora a i b sa x $\angle(\vec{a},\vec{b}) = x$, onda je:

$\cos x = \dfrac{3}{5}$

Pošto važi osnovni identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, odavde je

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

izračunajmo sada: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 20 \quad \frac{4}{5} = 16$

Dakle: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 16$