POLINOMI NAD POLJEM KOMPLEKSNIH BROJEVA I JEDNAČINE

Najprostije rečeno, polinom P je funkcija preslikavanja C u C a definisana je sa:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_o$$

Ako je $a \neq 0,$ kazemo da je $n-$ stepen polinoma $P(z)$.

Dva polinoma $n-$ tog stepena:

$$P(z) = A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + ... + A_1 Z + A_o$$
$$Q(z) = B_n Z^n + B_{n-1} Z^{n-1} + ... + B_1 Z + B_o$$

Su indentički jednaki onda i samo onda ako je:

$$A_n = B_n, A_{n-1} = B_{n-1}, ..., A_o = B_o$$

Naravno i ovde važi Bezuova teorema koju smo već objasnili u običnim polinomima:
Pri deljenju polinoma $P(z)$ sa $(z-a)$ dobija se ostatak $P(a)$. Ako je a-koren polinoma, tj. $P(a)$ =0 onda je polinom $P(z)$ deljiv bez ostatka sa $(z-a)$

Osnovna teorema algebra je:

Svaki polinom P nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jednu nulu.

→ Prva od posledica ove veoma bitne teoreme odnosi se na faktorizaciju polinoma.

Primer:

$$\begin{aligned} z^2 + 1 &= z^2 - (-1) \\ &= z^2 - i^2 = (z-i)(z+i) \end{aligned}$$

.

→ Svaki polinom $n-$ tog stepena može se napisati u obliku

$$P(z) = a_n (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ koreni polinoma i a_n koeficijenat uz z^n.

→ Ako je polinom P deljiv polinomom $Q(z)=(z-a)^k$, a nije deljiv polinomom $S(z)=(z-a)^{k+1}$, kažemo da je a nula reda k polinoma P.

→ Polinom P stepena n ne može se anulirati za više od n različitih vrednosti

Primer:

Ako su a,b i c medjusobno različiti brojevi, dokazati da je:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

Rešenje:

Prebacićemo sve na levu stranu i napraviti polinom koji je očigledno stepena 2 (pa ne može imati više od 2 rešenja)

$$P(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$$

Ako stavimo $x=a$ dobijamo

$$P(a)=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}-1$$
$$P(a)=1+0+0-1=0$$

Dakle a je rešenje (nula, koren) ovog polinoma.
Slično je $P(b)=0$ i $P(c)=0$
Ovo znači da se polinom anulira za tri različite vrednosti i P(x) je zato nula polinom, tj. $P(x)=0$ a odavde direktno ''izlazi'' traženo tvrdjenje.

→ Polinom sa realnim koeficijentima neparnog stepena uvek ima bar jednu realnu nulu

Vietove formule

One predstavljaju vezu izmedju koeficijenta i nula polinoma. Pomoću njih se često mogu rešavati jednačine $P(x)=0$. Neka je dat polinom :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$$

I neka su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ koreni (nule, rešenja) date jednačine, tada je:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_o}{a_n}$$

<u>NAPOMENA:</u>

Već smo pominjali Vietove formule za kvadratnu jednačinu:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

to jest:

$a_2x^2 + a_1x + a_o = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-1)^2 \cdot \frac{a_o}{a_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a_o}{a_2}$$

<u>Zadaci:</u>

1) Odrediti parameter m i n tako da polinom $P(x) = x^4 - 3x^2 + mx + n$ bude deljiv sa polinomom $P_1(x) = x^2 - 2x + 4$

$$(x^4 - 3x^2 + mx + n) : (x^2 - 2x + 4) = x^2 + 2x$$

$$\underset{(-)}{} x^4 \underset{(+)}{-} 2x^3 \underset{(-)}{+} 4x^2$$

$$2x^3 + 7x^2 + mx + n$$

$2x^3 + (m-8)x + n$ → Ovo sad malo sredimo

$$(-3x^2+(m-8)x+n):(x^2-2x+4)=-3$$
$$\underset{(+)}{-}3x^2\ \underset{(-)}{+}6x\ \underset{(+)}{-}12$$

$$(m-8)x-6x+n+12 \rightarrow \text{ I ovo sredimo}$$
$$(m-8-6)x+n+12=$$
$$(m-14)x+n+12=0$$

Ovo mora biti nula da ne bi bilo ostatka pri deljenju.

$$m-14=0 \qquad \wedge \qquad n+12=0$$
$$m=14 \qquad\qquad n=-12$$

2) Odrediti koeficijente a,b i c u polinomu $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tako da polinom bude deljiv binomima $x-1$ i x+2 a da podeljen sa $x-4$ daje ostatak 18.

Ako može da je polinom P(x) deljiv polinomom $x-1$ to znači da je $P(1)=0$, slično je i $P(-2)=0$ a pošto je pri deljenju sa $x-4$ ostatak 18, to je $P(4)=18$

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$$
$$P(1)=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c+1=0$$
$$P(-2)=(-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=4a-2b+c-8=0$$
$$P(4)=4^3+a\cdot 4^2+b\cdot 4+c=16a+4b+c+64=18$$

Dobili smo sistem jednačina:

$$a+b+c=-1$$
$$4a-2b+c=8$$
$$16a+4b+c=-46$$

Rešenja ovog sistema su:

$$a=-2 \qquad b=-5 \qquad c=6$$

pa je traženi polinom: $P(x)=x^3+2x^2-5x+6$

3) Odrediti realne parameter a,b i c tako da polinom x^3+ax^2+bx-c bude deljiv sa $x-i$ a da podeljen sa $x+1$ daje ostatak -5

Pošto je polinom deljiv sa $x-i$ onda je on deljiv i sa $x+i$ pa i sa

$$(x-i)(x+i)=x^2-i^2=x^2+1$$

$$(x^3+ax^2+bx-c):(x^2+1)=x+a$$
$$\underline{\underset{(-)}{x^3}\ \underset{(-)}{+\,x}}$$
$$ax^2+(b-1)x+c$$
$$\underline{\underset{(-)}{ax^2}\ \underset{(-)}{+\,a}}$$
$(b-1)x+c-a \rightarrow$ Ostatak koji mora biti nula!!!

Dakle $\begin{matrix} b-1=0 \\ b=1 \end{matrix}$ i $\begin{matrix} c-a=0 \\ c=a \end{matrix}$

Drugi podatak da polinom deljen sa $x+1$ daje ostatak -5 nam govori da je $P(-1)=-5$

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$$
$$P(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+c=-5$$
$$-1+a-b+c=-5$$
$$a-b+c=-4$$
$$a-1+c=-4$$
$$a+c=-3$$
$$a=c=-\frac{3}{2}$$

4) Znajući da je zbir dva korena $x_1+x_2=1$ jednačine $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$, nadji parametar λ

$$2x^3-x^2-7x+\lambda=0$$

Upotrebićemo Vietove formule za jednačinu trećeg stepena:

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$
$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3}$$
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{a_o}{a_3}$$

Kod nas je:

$$a_3 = 2, a_2 = -1, a_1 = -7, a_o = \lambda$$

pa je

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{\lambda}{2}$$

U zadatku kaže da je $x_1 + x_2 = 1$ pa je $x_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{7}{2}$$
$$x_1x_2 + x_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + x_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$
$$x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{7}{2}$$
$$x_1x_2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}$$
$$x_1x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$$
$$x_1x_2 = -3$$

Kako je: $x_1x_2x_3 = -\frac{\lambda}{2}$

$$-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2}$$
$$\frac{3}{2} = -\frac{\lambda}{2}$$
$$\lambda = -3$$