

NEKE JEDNAČINE KOJE SE SVODE NA KVADRATNE

1) Bikvadratna jednačina

To je jednačina oblika: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ Uvodimo smenu $x^2 = t$, dobijamo jednačinu

$at^2 + bt + c = 0$, nadjemo $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i vratimo se u smenu:

$$\begin{array}{ll} x^2 = t_1 & \text{i} \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} & \text{i} \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 = t_2 \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} \end{array}$$

Primer1: $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$$\begin{array}{l} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow \text{smena } x^2 = t \\ t^4 - 4t^2 + 3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{array} \quad t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$t_1 = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

Vratimo se u smenu:

$$\begin{array}{ll} x^2 = t_1 & x^2 = t_2 \\ x^2 = 3 & x^2 = 1 \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{3} & \text{i} \\ x_1 = +\sqrt{3} & x_{3,4} = \pm\sqrt{1} \\ x_2 = -\sqrt{3} & x_3 = +1 \\ & x_4 = -1 \end{array}$$

Primer 2: $(4x^2 - 5)^2 + (x^2 + 5)^2 = 2(8x^4 - 83)$

$$(4x^2 - 5)^2 + (x^2 + 5)^2 = 2(8x^4 - 83)$$

$$16x^4 - 40x^2 + 25 + x^4 + 10x^2 + 25 = 16x^4 - 166$$

$$x^4 - 30x^2 + 50 + 166 = 0$$

$$x^4 - 30x^2 + 216 = 0 \rightarrow \text{Bikvadratna, smena: } x^2 = t$$

$$t^2 - 30t + 216 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -30$$

$$c = 216$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{30 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = \frac{36}{2} = 18$$

$$t_2 = \frac{24}{2} = 12$$

Vratimo se u smenu:

$$x^2 = 18$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{18}$$

$$x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$x_1 = +3\sqrt{2}$$

$$x_2 = -3\sqrt{2}$$

$$x^2 = 12$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{12}$$

$$x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x_3 = +2\sqrt{2}$$

$$x_4 = -2\sqrt{2}$$

Primer 3:

$$(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = 3$$

Ovo liči na bikvadratnu jednačinu, ali je mnogo bolje uzeti smenu: $x^2 - 2x = t$

$$x^2 - 2x = t$$

$$t^2 - 2t = 3$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = -1$$

Vratimo se sada u smenu:

$$x^2 - 2x = t_1 \qquad x^2 - 2x = t_2$$

$$x^2 - 2x = 3 \qquad x^2 - 2x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x^2 - 2x + 1 = 0$$

Sada rešavamo dve nove kvadratne jednačine po x.

$a = 1$	$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$	$a = 1$	$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$
$b = -2$		$b = -2$	
$c = -3$	$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$	$c = 1$	$x_{3,4} = \frac{2 \pm 0}{2}$
	$x_1 = 3$		$x_3 = 1$
	$x_2 = -1$		$x_4 = 1$

Dakle, rešenja su: $\{3, -1, 1, 1\}$

Primer 4: $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$

Ovo baš i ne liči na bikvadratnu jednačinu, a ne ‘vidi se’ da ima neka pametna smena.

Ako sve pomnožimo tek tad smo u problemu!!!

Probajmo da pomnožimo prva dva, i druga dva, da vidimo šta će da ispadne...

$$(x^2 + x)(x^2 + 3x + 2x + 6) = 0,5625$$

$$(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = 0,5625 \rightarrow \text{Neće!!!}$$

Probajmo onda prvi i četvrti, a drugi i treći!!!

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$$

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 2x + 1x + 2) = 0,5625$$

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 0,5625$$

E, ovo je već bolje \Rightarrow Smena: $x^2 + 3x = t$

$$t \cdot (t + 2) = 0,5625$$

$$t^2 + 2t - 0,5625 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2,25}}{2} = \frac{-2 \pm 2,5}{2}$$

$$t_1 = +0,25$$

$$t_2 = -2,25$$

Vratimo se u smenu:

$$x^2 + 3x = +0,25$$

$$x^2 + 3x - 0,25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+1}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{10}}{2}$$

$$x^2 + 3x = +2,25$$

$$x^2 + 3x - 2,25 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-9}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_3 = x_4 = -\frac{3}{2}$$

5) Reši jednačinu $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + 3 \cdot \frac{x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

Ovde je zgodno uzeti smenu $\frac{x^2 + x - 5}{x} = t$, jer je onda $\frac{x}{x^2 + x - 5} = \frac{1}{t}$

$$t + 3 \cdot \frac{1}{t} + 4 = 0 / \cdot t$$

$$t^2 + 3 + 4t = 0$$

$$t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = -3$$

Vratimo se u smenu:

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -1$$

ili

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -3$$

$$x^2 + x - 5 = -x$$

$$x^2 + x - 5 = -3x$$

$$x^2 + x - 5 + x = 0$$

$$x^2 + x - 5 + 3x = 0$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+20}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x_4 = -5$$

$$x_{1,2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{6})}{2}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{6}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{6}$$

$\{-1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}, 1, -5\}$ su rešenja.

Binomne jednačine

To su jednačine oblika:

$$Ax^n \pm B = 0$$

gde su $A > 0$ i $B > 0$

Najpre pokušamo da datu jednačinu rastavimo na činioce upotrebom poznatih formula, pa koristimo $M \cdot N = 0 \Leftrightarrow M = 0 \vee N = 0$

Uvek ovu jednačinu možemo rešiti smenom $x = y \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, koja binomnu jednačinu svede na oblik $y^n \pm 1 = 0$

Primer 1 $8x^3 - 27 = 0$

$$8x^3 - 27 = 0$$
$$(2x)^3 - 3^3 = 0$$

Pazi: Pogrešno je
jer se ‘gube’
rešenja!!!

$$8x^3 = 27$$
$$x^3 = \frac{27}{8}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Upotrebićemo formulu

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$
$$(2x - 3)((2x)^2 + 2x \cdot 3 + 3^2) = 0$$
$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0 \Rightarrow \text{odavde je:}$$

$$2x - 3 = 0 \quad 4x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$2x = 3 \quad \text{ili} \quad x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 144}}{8}$$
$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{-108}}{8} = \frac{-6 \pm 6\sqrt{3}i}{8}$$
$$x_2 = \frac{-6 + 6\sqrt{3}i}{8}$$
$$x_3 = \frac{-6 - 6\sqrt{3}i}{8}$$

$$x_2 = \frac{-6 + 6\sqrt{3}i}{8} = \frac{2(-3 + 3\sqrt{3}i)}{8} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{4}$$

$$x_3 = \frac{-6 - 6\sqrt{3}i}{8} = \frac{2(-3 - 3\sqrt{3}i)}{8} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{4}$$

PAZI: $\sqrt{-108} = \sqrt{108} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{36 \cdot 3} \cdot i = 6\sqrt{3}i$

Primer 2 $x^6 - 729 = 0$

$$x^6 - 729 = 0$$
$$x^6 - 3^6 = 0$$
$$(x^3)^2 - (3^3)^2 = 0 \rightarrow \text{Razlika kvadrata}$$

$$(x^3 - 3^3)(x^3 + 3^3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 3x + 9)(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$x-3=0 \quad \text{ili} \quad x^2 + 3x + 9 = 0 \quad \text{ili} \quad x+3=0 \quad \text{ili} \quad x^2 - 3x + 9 = 0$$

$$\boxed{x_1 = 3} \quad x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$$
$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2}} \quad \boxed{x_3 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}}$$

$$x+3=0 \rightarrow \boxed{x_4 = -3} \quad x^2 - 3x + 9 = 0 \rightarrow x_{5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$$

$$\boxed{x_5 = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2}} \quad \boxed{x_6 = \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2}}$$

PAZI: $\sqrt{-27} = \sqrt{27} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{9 \cdot 3} \cdot i = 3\sqrt{3}i$

Primer 3.: Rešimo jednačinu:

$$5x^3 + 2 = 0$$

Rešenje: Sad se ne može upotrebiti formula, pa idemo na smenu:

$$x = y \sqrt[n]{\frac{B}{A}}, \text{ kako je } A=5, B=2, n=3$$

$$\text{smena je } x = y \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$5 \cdot \left(y \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \right)^3 + 2 = 0$$

$$5 \cdot y^3 \cdot \frac{2}{5} + 2 = 0$$

$$y^3 \cdot 2 + 2 = 0$$

$$2 \cdot (y^3 + 1) = 0 \Rightarrow y^3 + 1 = 0 \text{ (zbir kubova)}$$

$$(y+1)(y^2 - y - 1) = 0$$

$$y+1 = 0$$

$$\boxed{y_1 = -1}$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$y_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$x = y^3 \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$x_1 = -1 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \quad \text{i} \quad x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

Primer 4 Rešiti jednačinu

$$11x^4 - 17 = 0$$

Rešenje: I ovde ne možemo lako datu jednačinu rastaviti na činioce; zato upotrebljavamo

smenu: $x = y^{\frac{B}{A}}$

Kako je $n = 4$, $B = 17$, $A = 11 \Rightarrow x = y^{\frac{17}{11}}$

$$11 \cdot \left(y^{\frac{17}{11}} \right)^4 - 17 = 0$$

$$11 \cdot y^{\frac{17}{11} \cdot 4} - 17 = 0$$

$$17 \cdot y^4 - 17 = 0 \Rightarrow 17(y^4 - 1) = 0 \Rightarrow y^4 - 1 = 0 \rightarrow (y^2)^2 - 1 = 0$$

$$(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$$

$$(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) = 0$$

$$\begin{array}{llll}
 y-1=0 & \text{ili} & y+1=0 & \text{ili} & y^2+1=0 \\
 y_1=1 & & y_2=-1 & & y^2=-1 \\
 & & & & y_{3,4}=\pm\sqrt{-1}=\pm i \\
 & & & & y_3=+i \\
 & & & & y_4=-i
 \end{array}$$

Vratimo se u smenu $x = y^4 \sqrt[4]{\frac{17}{11}}$

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 1 \cdot \sqrt[4]{\frac{17}{11}} = \sqrt[4]{\frac{17}{11}}; & x_2 = -1 \sqrt[4]{\frac{17}{11}} = -\sqrt[4]{\frac{17}{11}} \\
 x_3 = i \sqrt[4]{\frac{17}{11}}; & x_4 = -i \sqrt[4]{\frac{17}{11}}
 \end{array}$$

Trinomne jednačine

To su jednačine oblika

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

gde su a, b i c realni brojevi (različite od nule).

Rešava se smenom $x^n = t \Rightarrow x^{2n} = t^2$. Rešavamo kvadratnu po t , pa se vratimo u smenu.

Primer 1: Reši jednačinu

$$\begin{array}{l}
 x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \\
 \text{Rešenje: } (x^3)^2 + 7x^3 - 8 = 0 \quad \text{cmena } x^3 = t \\
 t^2 + 7t - 8 = 0 \\
 t_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{2} \\
 t_1 = 1 \\
 t_2 = -8
 \end{array}$$

Vratimo se u smenu:

$$\begin{array}{lll}
 x^3 = 1 & \text{Ili} & x^3 = -8 \\
 x^3 - 1 = 0 & & x^3 + 8 = 0 \\
 (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 & & x^3 + 2^3 = 0 \\
 x-1 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + x + 1 = 0 & & (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0
 \end{array}$$

www.matematiranje.com

$$x_1 = 1 \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 - 2x + 4$$

$$x_4 = -2$$

$$x_{5,6} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$x_{5,6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$x_{5,6} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

Primer 2: Rešiti jednačinu:

$$x^8 - 17x^4 + 16 = 0$$

Rešenje: $(x^4)^2 - 17x^4 + 16 = 0$

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{2}$$

$$t_1 = 16$$

$$t_2 = 1$$

smena: $x^4 = t$

Vratimo se u smenu:

$$x^4 = 16 \quad \text{ili}$$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$x^4 - 2^4 = 0$$

$$(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{ili} \quad x + 2 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + 4 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad x^2 = -4$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{-4}$$

$$x_3 = +2i$$

$$x_4 = -2i$$

$$x^4 = 1$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad x + 1 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + 1 = 0$$

$$x_5 = 1 \quad x_6 = -1 \quad x^2 = -1$$

$$x_{7,8} = \pm\sqrt{-1}$$

$$x_7 = +i$$

$$x_8 = -i$$

Dakle rešenja su:

$$\{2, -2, 2i, -2i, 1, -1, +i, -i\}$$

Simetrične (recipročne) jednačine

To su jednačina oblika:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$$

Gde su a, b, c, \dots realni brojevi. Naziv simetrične potiče jer su koeficijenti uz x^{n-k} i x^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) jednaki.

Drugo ime recipročne su dobile zbog osobina: Ako je $x = \alpha$ jedno rešenje, onda je i $x = \frac{1}{\alpha}$ takodje rešenje date jednačine i važi osobina: Ako je najveći stepen n – neparan broj, tada je $x_1 = -1$ jedno rešenje simetrične jednačine!!!

Postupak rešavanja

- Ako je jednačina neparnog sistema podelimo je sa $(x+1)$ i dobijemo jednačinu parnog sistema
- Celu jednačinu podelimo sa "srednjim" članom i grupišemo odgovarajuće članove.

- Uzimamo smenu $\boxed{x + \frac{1}{x} = t}$, odavde je ako kvadriramo:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \rightarrow \text{ZAPAMTI}}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = t^3$$

ili $x^3 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = t^3$

$$x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = t^3$$

$$x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = t^3$$

$$\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t} \rightarrow \text{ZAPAMTI}$$

itd...

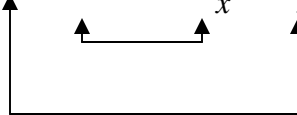
Primer1: Rešiti jednačinu:

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$$

Rešenje: Celu jednačinu delimo sa x^2 jer je on srednji član. Dakle

$$\frac{2x^4}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} - \frac{16x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{grupišemo članove!!!}$$



$$2\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0 \quad \text{smena: } x + \frac{1}{x} = t$$

$$2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0$$

$$2t^2 - 4 + 3t - 16 = 0$$

$$2t^2 + 3t - 20 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}$$

$$t_1 = -4, \quad t_2 = \frac{5}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$x + \frac{1}{x} = -4$$

$$x^2 + 1 = -4x$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 2 = 5x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

Dakle, rešenja su 2 i $\frac{1}{2}$ i $-2 + \sqrt{3}$ i $-2 - \sqrt{3}$ i recipročna su!!! Za 2 i $\frac{1}{2}$ je to očigledno, a šta je sa $-2 + \sqrt{3}$ i $-2 - \sqrt{3}$?

$$\frac{-2 + \sqrt{3}}{1} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{1} \cdot \frac{-2 - \sqrt{3}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{(-2)^2 - \sqrt{3}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{-2 - \sqrt{3}}$$

Sad vidimo (posle racionalizacije) da su i ona takodje recipročna.

Primer 2: Rešiti jednačinu:

$$12x^5 + 16x^4 - 37x^3 - 37x^2 + 16x + 12 = 0$$

Rešenje:

Ovo je jednačina petog stepena, pa je jedno rešenje $x = -1$, pa ćemo celu jednačinu podeliti sa $(x+1)$

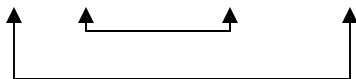
$$(12x^5 + 16x^4 - 37x^3 - 37x^2 + 16x + 12) : (x+1) = 12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12$$

Pogledaj deljenje polinoma!!!

Dalje radimo:

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0 / : x^2$$

$$12x^2 + 4x - 41 + 4 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$



$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

Smjena $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$$12(t^2 - 2) + 4t - 41 = 0$$

$$12t^2 - 24 + 4t - 41 = 0$$

$$12t^2 + 4t - 65 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm 56}{24}$$

$$t_1 = \frac{13}{6}$$

$$t_2 = -\frac{5}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

i

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$x_4 = -2$$

Dakle: $\left\{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -2, -1\right\}$ su rešenja

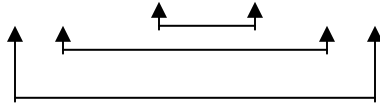
Veoma slične simetričnim su KOSOSIMETRIČNE jednačine, one su oblika $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots - cx^2 - bx - a = 0$ tj. koeficijenti uz x^k i x^{n-k} su suprotni koeficijenti

Ako je kososimetrična jednačina neparnog sistema, jedno rešenje je uvek $x_1 = 1$

Postupak rešavanja je sličan!!!

Primer 3:

$$x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0 \quad \text{kososimetrična}$$



Pošto je njeno rešenje $x_1 = 1$, celu jednačinu delimo sa $(x-1)$

$$(x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1) : (x-1) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1$$

Dobijena jednačina:

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ je simetrična } / : x^2$$

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x + 10 - 6 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

itd...

Dobijena rešenja su $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2 + \sqrt{3}, x_4 = 2 - \sqrt{3}$ i $x_5 = 1$