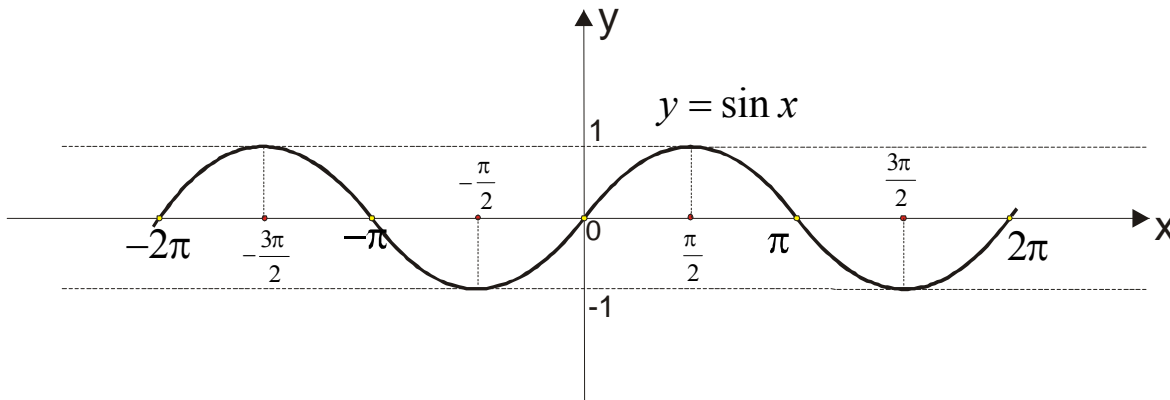


GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA (I deo)

$$y = a \sin(bx + c)$$

Da se najpre podsetimo osnovnog grafika funkcije $y = \sin x$ i njenih osobina.



Osobine:

- funkcija je definisana za svako x , to jest $x \in (-\infty, \infty)$
- skup vrednosti funkcije je interval $[-1, 1]$, to jest funkcija je ograničena $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\sin x$ je periodična funkcija sa osnovnom periodom 2π
- **nule funkcije** (mesta gde grafik seče x osu) su $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi \dots$ ili ovo možemo zapisati , uzimajući u obzir periodičnost kao $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
- **maksimalne vrednosti** funkcije su u $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ to jest, možemo zapisati: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in Z$
- **minimalne vrednosti** funkcije su u $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ to jest , možemo zapisati: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in Z$
- $\sin x$ **raste** u intervalima $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in Z$
- $\sin x$ **opada** u intervalima $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in Z$
- funkcija je **pozitivna**, $\sin x > 0$ za $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ $k \in Z$
- funkcija je **negativna**, $\sin x < 0$ za $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ $k \in Z$
- grafik se zove **SINUSOIDA**

Trigonometrijsku funkciju $y = a \sin(bx + c)$ ćemo da naučimo da crtamo na dva načina.

Prvi način se sastoji u tome da krenemo od početnog grafika $y = \sin x$ i da u zavisnosti od brojeva a, b i c vršimo pomeranja grafika (naučićemo kako) a drugi način je direktno ispitivanje tačaka (nule funkcije, max, min...) ali za njega nam je potrebno da znamo rešavati trigonometrijske jednačine.

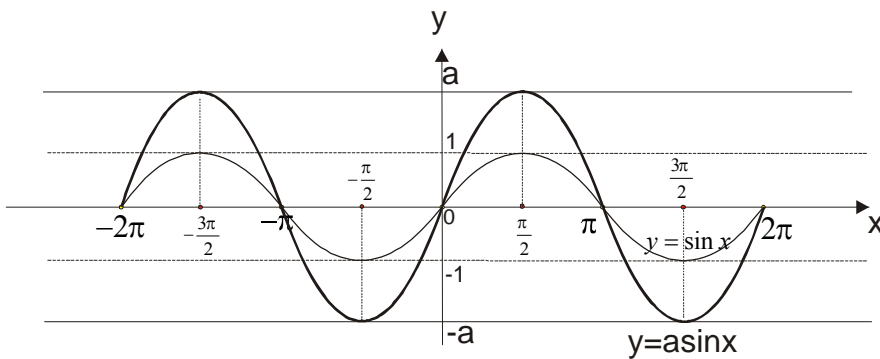
Najpre uočite i zapišete brojeve a, b i c . Svaki od njih priča neku priču...

$$y = a \sin x$$

Broj a koji je ispred sinusa se zove **amplituda** i predstavlja maksimalno rastojanje tačke grafika od x - ose.

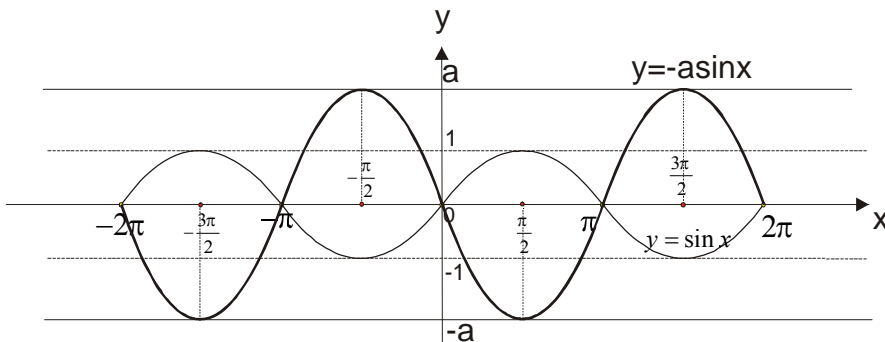
Za funkciju $y = \sin x$ je taj broj $a = 1$ a na grafiku vidimo da je ona baš ograničena sa -1 i 1 .

Ako je broj ispred sinusa pozitivan , funkcija izgleda:



Dakle, nule funkcije ostaju na svojim mestima , dok se max i min “ produže” do tačke a , odnosno $-a$.

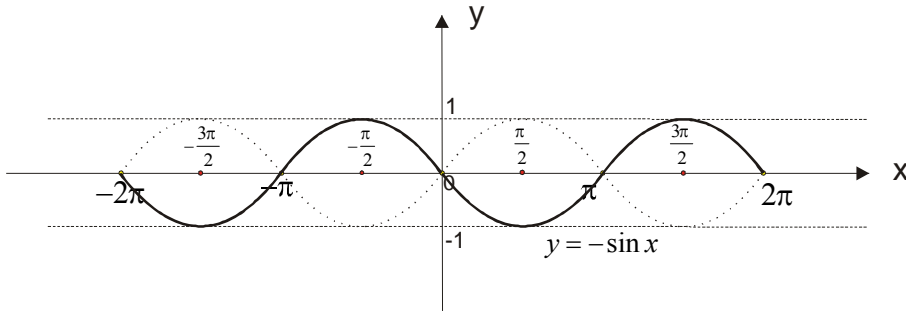
Ako je broj ispred sinusa negativan , funkcija izgleda:



Ovde dakle moramo voditi računa jer se grafik “ okreće”, a max i min zamene mesta i produže se do tačke a , odnosno $-a$.

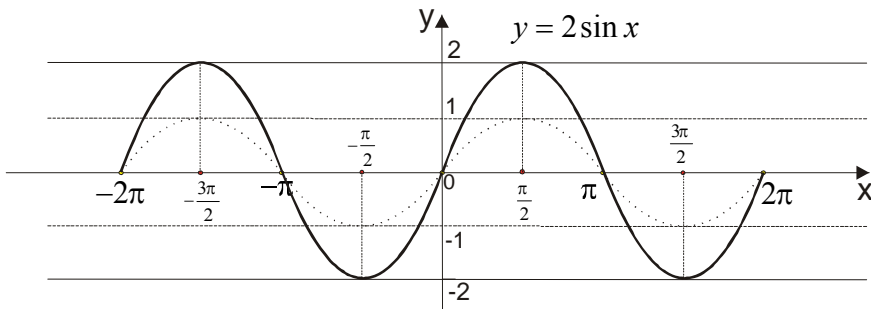
primer 1. Nacrtati grafik funkcije $y = -\sin x$

Ovde nam je $a = -1$. To nam govori da početni grafik $y = \sin x$ (koji je nacrtan na slici isprekidanom linijom) samo “ okrenemo”.



primer 2. Nacrtati grafik funkcije $y = 2 \sin x$

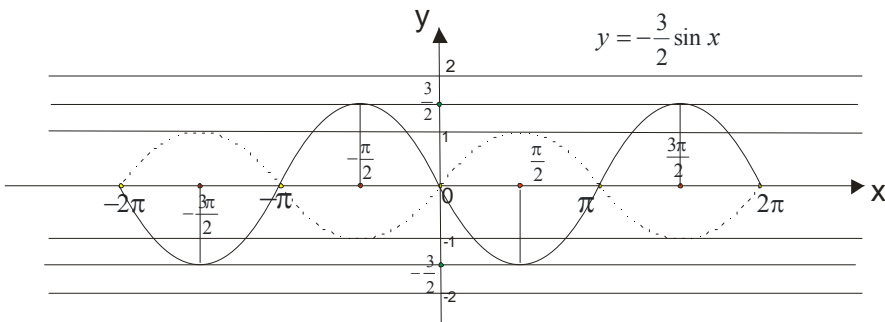
Sada je $a = 2$. To znači da funkcija po y- osi ide od -2 do 2 i da se grafik ne okreće.



primer 3. Nacrtati grafik funkcije $y = -\frac{3}{2} \sin x$

Vidimo da je $a = -\frac{3}{2}$. Grafik je u odnosu na početni okrenut, zbog minusa i nalazi se, gledajući po y osi ,

između $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.



$$y = \sin bx$$

Periodičnost funkcije $y = a \sin(bx + c)$ direktno sledi iz periodičnosti funkcije $y = \sin x$.

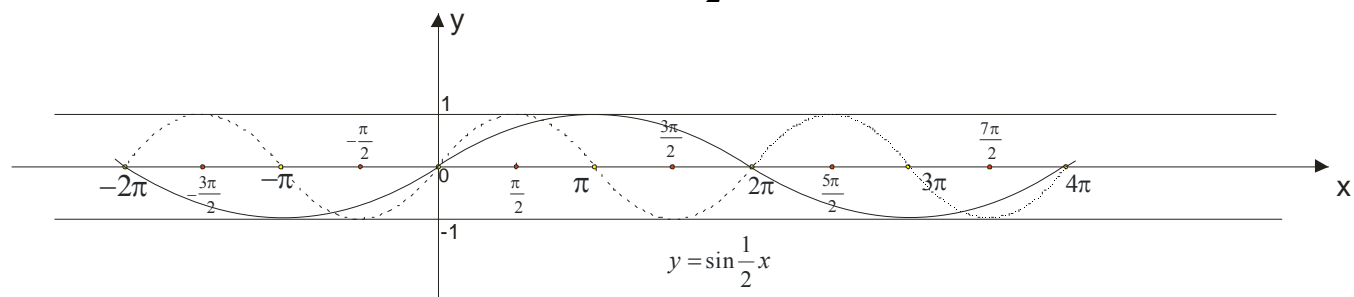
Osnovni period za $y = a \sin(bx + c)$ se računa po formuli $T = \frac{2\pi}{b}$.

Broj b se zove *frekvencija* ili *učestalost* i pokazuje koliko se celih talasa nalazi na intervalu $[0, 2\pi]$

Dakle, naš poso je da uočimo broj b , i ubacimo ga u formulu $T = \frac{2\pi}{b}$ da bi dobili osnovnu periodu.

primer 4. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin \frac{1}{2}x$

Uočimo da je ovde $b = \frac{1}{2}$. Onda je $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow T = 4\pi$

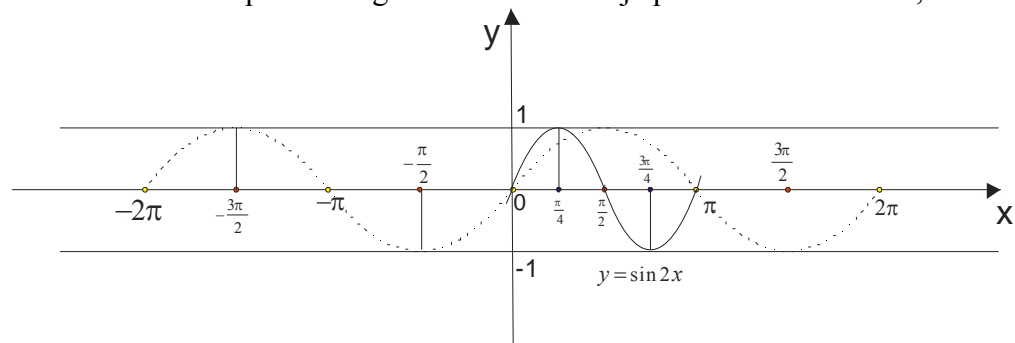


Početna funkcija $y = \sin x$ je i ovde data isprekidano. Šta se desilo sa njom? Vidimo da se ona izdužila, jer je sada perioda $T = 4\pi$.

primer 5. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin 2x$

Kako je $b = 2$ onda će osnovna perioda biti $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} \rightarrow T = \pi$

Šta će sada biti sa početnim grafikom? Pa kako je perioda samo $T = \pi$, on će da se “skupi”:



$y = \sin(x + c)$ odnosno $y = \sin(bx + c)$ (broj c se zove *početna faza*)

Opet naravno, najpre iz zadate funkcije pročitamo vrednosti za b i c . Onda odredimo vrednost za $\frac{c}{b}$.

Grafik funkcije $y = \sin(bx + c)$ se dobija pomeranjem grafika $y = \sin bx$ duž x ose i to (pazi na ovo):

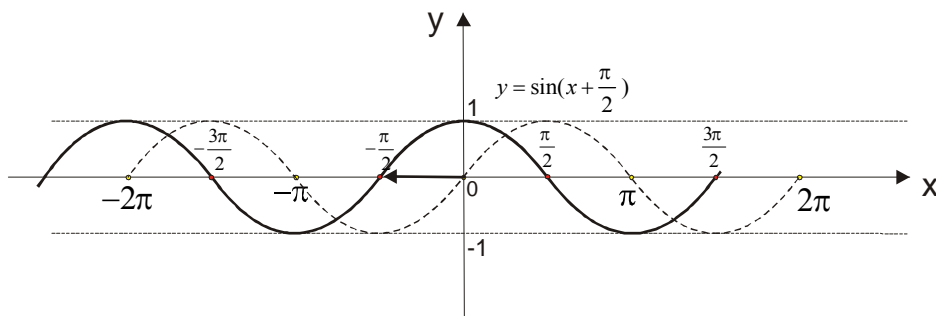
i) u pozitivnom smeru (udesno) ako je vrednost $\frac{c}{b}$ negativna

ii) u negativnom smeru (ulevo) ako je vrednost za $\frac{c}{b}$ pozitivna

primer 6. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

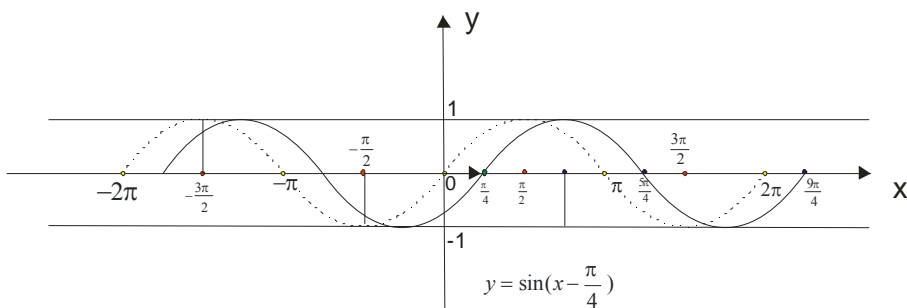
Ovde je $a=1, b=1, c = \frac{\pi}{2}$. Vrednost izraza $\frac{c}{b}$ je $\frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$. Šta ovo znači?

Pošto je vrednost ovog izraza pozitivna , početni grafik $y = \sin x$ pomeramo za $\frac{\pi}{2}$ ulevo.



primer 7. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$a = 1, b = 1, c = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$ Pomeramo grafik $y = \sin x$ za $\frac{\pi}{4}$ udesno.

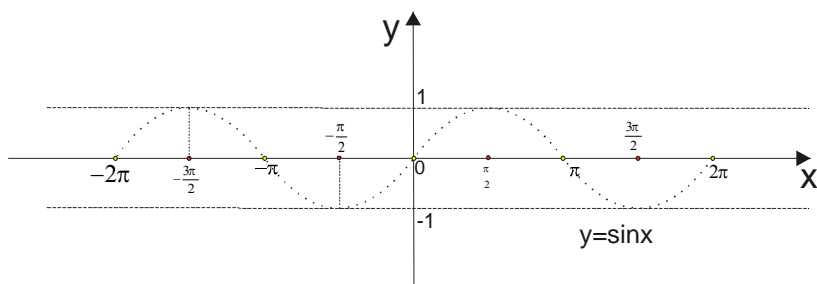


primer 8. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

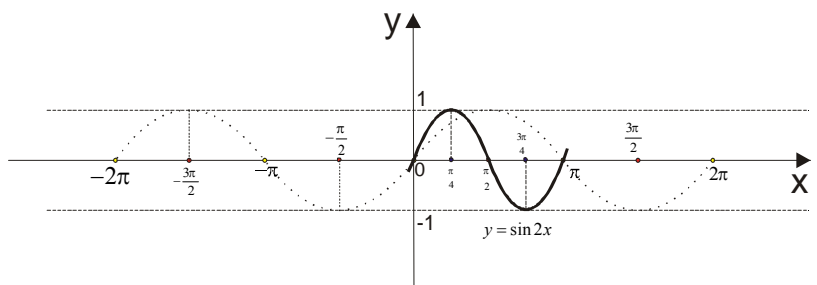
Ovde je $a=1$, $b=2$ i $c = -\frac{\pi}{2}$

Perioda je : $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} \rightarrow T = \pi$ a vrednost izraza : $\frac{c}{b} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$

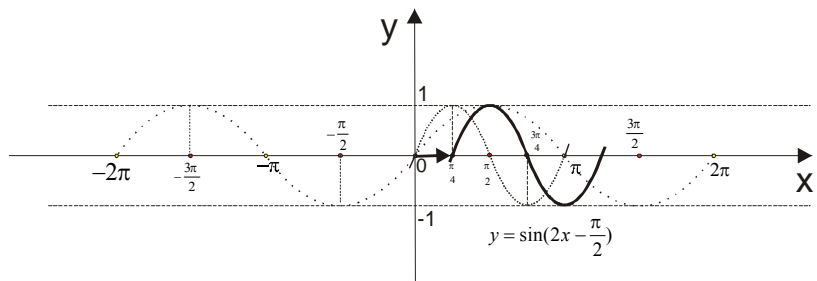
Moramo crtati **tri** grafika : $y = \sin x$ (**slika 1.**) pa onda $y = \sin 2x$ (**slika 2.**) i na kraju $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ (**slika 3.**)



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Na slici 2. vidimo da se grafik sinusne funkcije “skupio” zbog periode $T = \pi$.

Na slici 3. je izvršeno pomeranje grafika $y = \sin 2x$ za $\frac{\pi}{4}$ udesno, jer je vrednost $\frac{c}{b}$ negativna.

Verovatno će vaš profesor tražiti od vas da sva tri grafika nanosite na jednoj slici... Mi smo namerno crtali tri slike da bi bolje razumeli...

primer 9. Nacrtati grafik funkcije $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$a = 1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4}$$

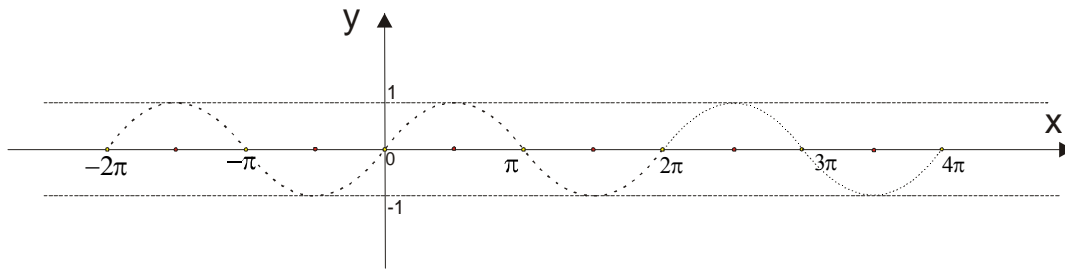
Tražimo periodu: $T = \frac{2\pi}{b} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow T = 4\pi$ i vrednost izraza: $\frac{c}{b} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Opet idu tri grafika:

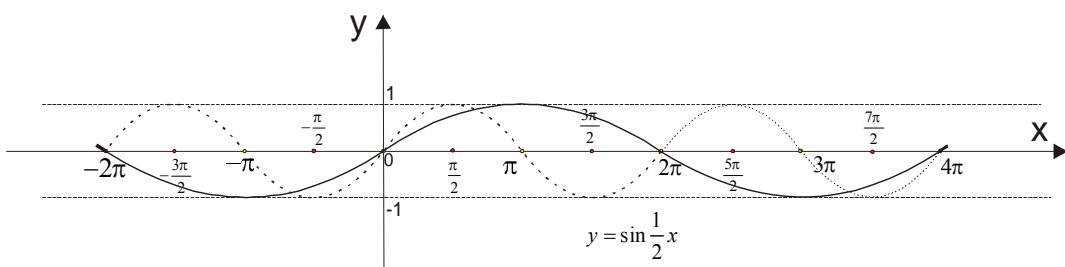
Na slici 1. je početni grafik $y = \sin x$

Na slici 2. je grafik $y = \sin \frac{1}{2}x$ koji dobijamo povećavajući periodu na 4π

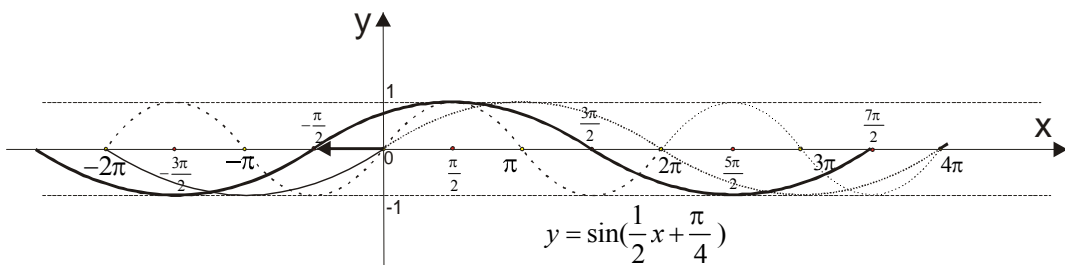
Na slici 3. je konačan grafik $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ koji dobijamo kada grafik funkcije $y = \sin \frac{1}{2}x$ pomerimo za $\frac{\pi}{2}$ udesno, jer je vrednost izraza $\frac{c}{b}$ pozitivna.



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Sada imamo znanje da nacrtamo ceo grafik $y = a \sin(bx + c)$ **ali to pogledajte u sledećem fajlu:**

GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA (II deo)

www.matematanje.com