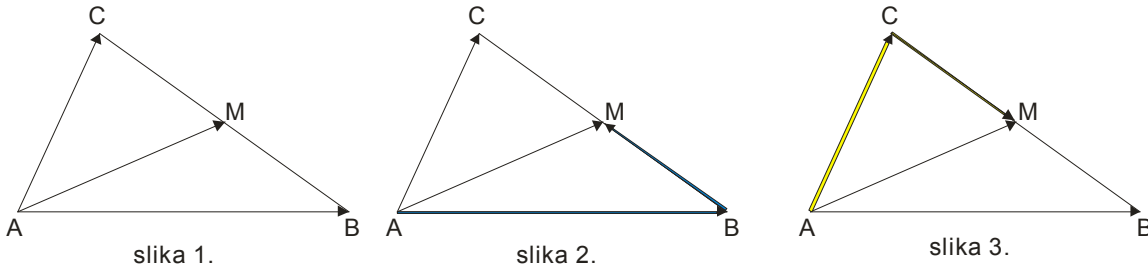


Primer 1.

Tačka M je središte stranice BC trougla ABC. Dokazati da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku i postavimo problem...



Na slici 1. su obeleženi vektori koji su dati u zadatku.

Šta je ideja?

Kod ovakvog tipa zadatka vektor u sredini izrazimo na obe strane!

Na slici 2. je vektor AM izražen (plavom putanjom) preko: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

Na slici 3. je vektor AM izražen (žuta putanja) preko: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$

Dalje ćemo ove dve jednakosti napisati jednu ispod druge i sabrati ih:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$

pretumbamo malo

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$$

pogledajmo zadnja dva vektora na slici...suprotni su , pa je $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = 0$

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

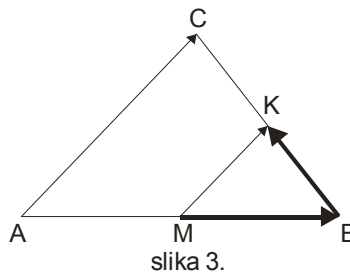
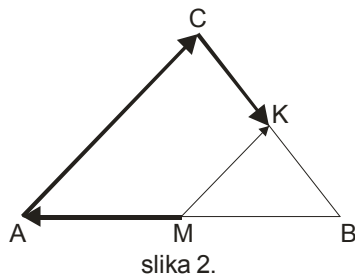
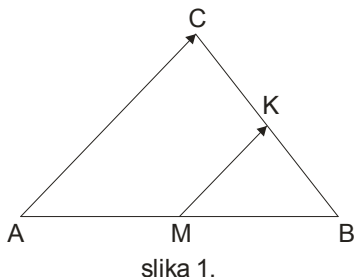
Dobili smo traženu jednakost.

Primer 2.

U trouglu ABC tačke M i K su središta stranica AB i BC. Dokazati da je $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MK}$

Rešenje:

Opet mora slika:



Slično kao u prethodnom zadatku, vektor u sredini MK, izražavamo na obe strane.

Na slici 2. idemo ulevo: $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$

Na slici 3. idemo udesno: $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$

Napišemo jednakosti jednu ispod druge i saberemo ih:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$$

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$$

Sad pogledamo sliku i uočimo suprotne vektore (istog pravca i intenziteta a suprotnog smeru).

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AC} + \boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}} + \boxed{\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK}}$$

Uokvireni su nula vektori, pa je:

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AC}$$

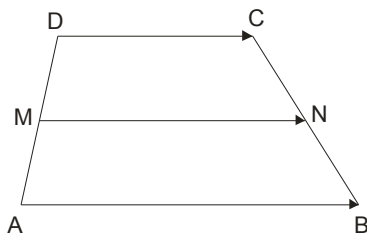
Primer 3.

Dat je trapez ABCD. Ako je M središte stranice AD, a N središte stranice BC, tada je $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

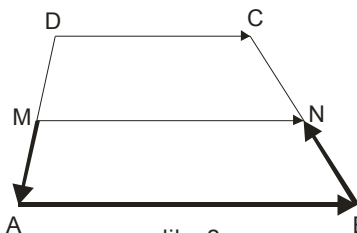
Dokazati.

Rešenje:

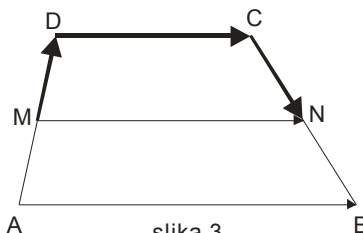
Ovo je ustvari dokaz činjenice da je srednja linija trapeza jednaka polovini zbira osnovica $m = \frac{a+b}{2}$



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Najpre ćemo vektor MN izraziti odozdo (slika 2.) pa odozgo (slika 3.), pa to sabrati...

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$$

$$\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN}$$

$$2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{DC} \quad \text{suprotni vektori se potiru, to jest daju nula vektor}$$

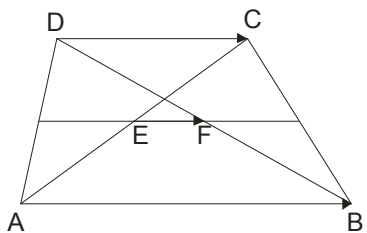
Još da celu jednakost podelimo sa 2 i dobijamo $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$.

Primer 4.

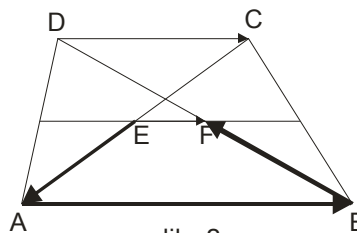
Neka su M i N središta neparalelnih stranica BC i AD trapeza ABCD, a E i F presečne tačke duži MN i dijagonala AC i BD. Tada je $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC})$

Rešenje:

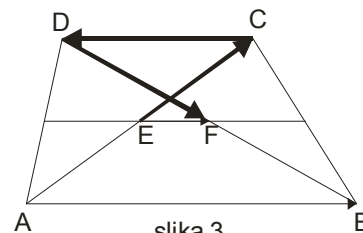
I u ovom zadatku se koristi isti trik, al je putanja izražavanja vektora u sredini malo čudna , da vidimo:



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Na slici 2. vektor EF izražavamo preko: $\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$.

Na slici 3. vektor EF izražavamo preko: $\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DF}$

Napišemo ove dve jednakosti jednu ispod druge, saberemo ih i potremo suprotne vektore...

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$$

$$\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DF}$$

$$2\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$$

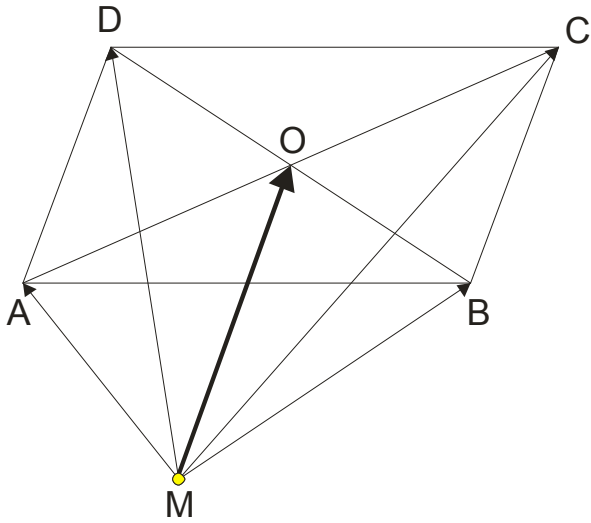
Znamo da važi : $\overline{CD} = -\overline{DC}$, ubacimo ovo u dobijenu jednakost i evo rešenja: $2\overline{EF} = \overline{AB} - \overline{DC}$.

Naravno ,ovo sve podelimo sa 2 i dobijamo: $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC})$.

Primer 5.

Ako je M proizvoljna tačka u ravni paralelograma ABCD , tada je $4\overline{MO} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$, gde je O tačka preseka dijagonala paralelograma. Dokazati.

Rešenje:



Vektor MO ćemo izraziti na 4 načina pa te jednakosti sabrati:

$$\overline{MO} = \overline{MA} + \overline{AO}$$

$$\overline{MO} = \overline{MB} + \overline{BO}$$

$$\overline{MO} = \overline{MC} + \overline{CO}$$

$$\overline{MO} = \overline{MD} + \overline{DO}$$

$$4\overline{MO} = \overline{MA} + \overline{AO} + \overline{MB} + \overline{BO} + \overline{MC} + \overline{CO} + \overline{MD} + \overline{DO}$$

Pretumbajmo malo ovu jednakost u smislu da uočimo suprotne vektore:

$$4\overline{MO} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} + \boxed{\overline{AO} + \overline{CO}} + \boxed{\overline{BO} + \overline{DO}} \quad (\text{ pogledajte na slici, ovo su suprotni vektori})$$

$$4\overline{MO} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$$

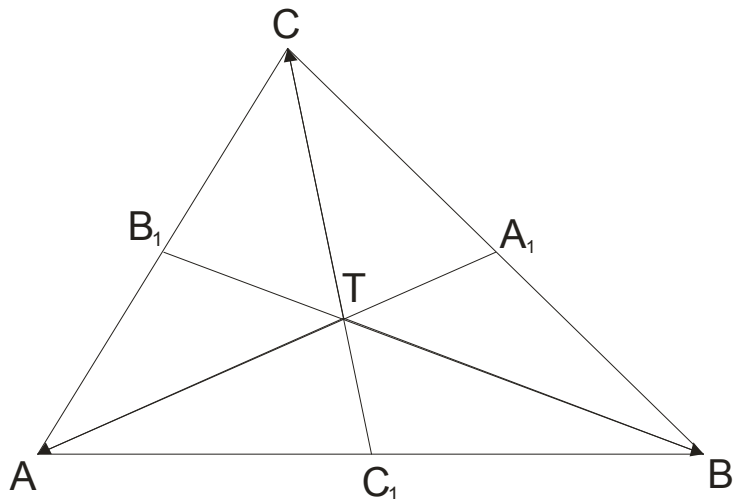
Primer 6.

Ako je T težište trougla ABC , tada je $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = 0$. **Dokazati.**

Rešenje:

Da se podsetimo: težišna duž spaja teme i sredinu naspramne stranice; sve tri težišne duži seku se u jednoj tački T koja je težište trougla; težište deli težišnu duž u odnosu 2:1.

Da nacrtamo sliku:



Krenućemo od $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = 0$ i **dokazati** da je ovaj zbir nula.

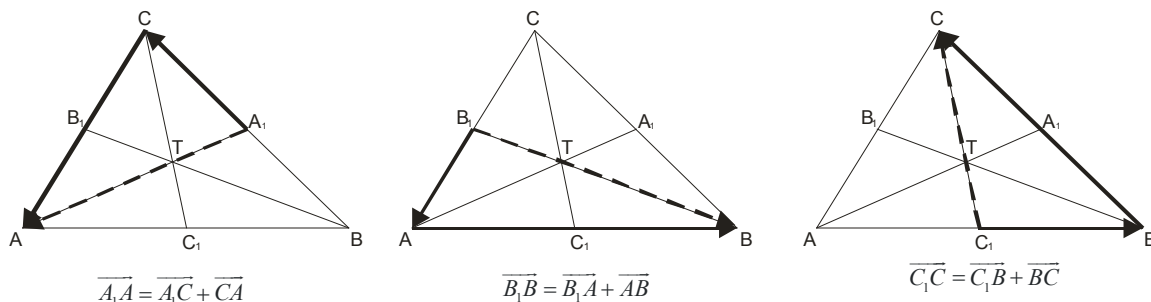
Rekosmo da težište deli težišnu duž u odnosu 2:1, pa je:

$$\vec{TA} = \frac{2}{3} \vec{A_1A}$$

$$\vec{TB} = \frac{2}{3} \vec{B_1B} \quad \text{Saberemo ove tri jednakosti i dobijamo: } \vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \frac{2}{3} (\vec{A_1A} + \vec{B_1B} + \vec{C_1C})$$

$$\vec{TC} = \frac{2}{3} \vec{C_1C}$$

Dalje ćemo izraziti svaki od ovih vektora (pogledaj na slici, to su isprekidano nacrtani vektori):



Saberemo ove tri jednakosti:

$$\overline{A_1A} = \overline{A_1C} + \overline{CA}$$

$$\overline{B_1B} = \overline{B_1A} + \overline{AB}$$

$$\overline{C_1C} = \overline{C_1B} + \overline{BC}$$

$$\overline{A_1A} + \overline{B_1B} + \overline{C_1C} = \overline{A_1C} + \overline{CA} + \overline{B_1A} + \overline{AB} + \overline{C_1B} + \overline{BC}$$

Pretumbajmo malo desnu stranu jednakosti:

$$\overline{A_1A} + \overline{B_1B} + \overline{C_1C} = \boxed{\overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC}} + \overline{A_1C} + \overline{B_1A} + \overline{C_1B}$$

Zaokruženi vektori imaju zbir nula, jer se zadnji vektor završava gde počinje prvi...

Pogledajmo sada preostali zbir $\overline{A_1C} + \overline{B_1A} + \overline{C_1B}$, i on je nula, jer je:

$$\overline{A_1C} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$\overline{B_1A} = \frac{1}{2} \overline{CA}$$

$$\overline{C_1B} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\overline{A_1C} + \overline{B_1A} + \overline{C_1B} = \frac{1}{2} (\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

E, ovim je dokaz konačno završen.

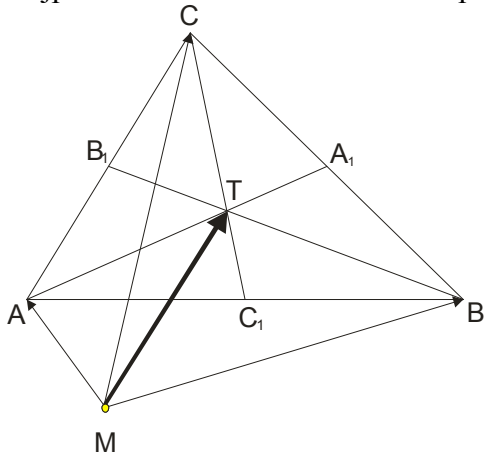
Primer 7.

Ako je M proizvoljna tačka u ravni trougla ABC, tada je $\overline{MT} = \frac{1}{3} (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})$, gde je T težište trougla.

Dokazati.

Rešenje:

Najpre moramo vektor MT izraziti preko vektora MA, MB i MC.



$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BT} \quad \text{saberemo ove tri jednakosti...}$$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CT}$$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BT}$$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CT}$$

$$3\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \boxed{\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}}$$

U prethodnom primeru smo videli da ovo uokvireno daje nula vektor, pa je: $3\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, a to smo i trebali dokazati.

WWW.MATEMATIRANJE.COM