

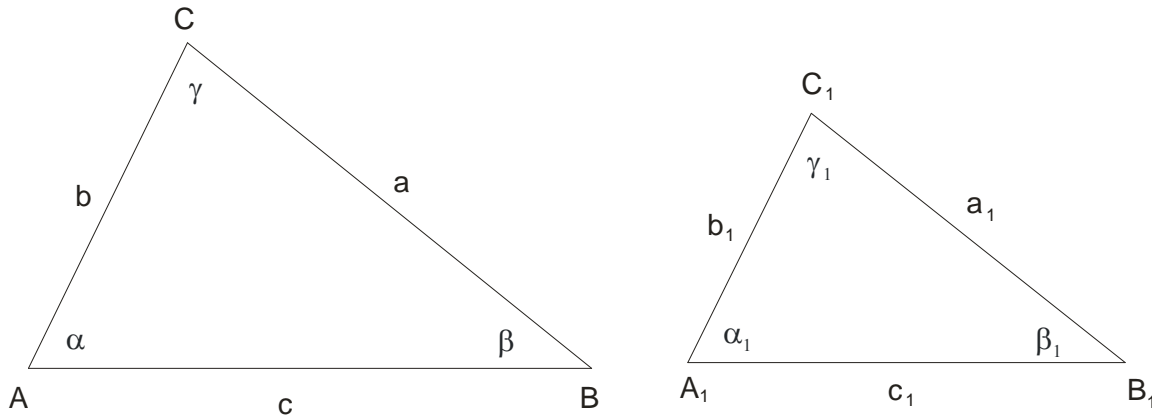
SLIČNOST TROUGLOVA

Za dve figure F i F_1 kažemo da su slične (sa koeficijentom sličnosti k) ako postoji transformacija sličnosti koja figuru F prevodi u figuru F_1 . Činjenicu da su dve figure slične obeležavamo sa $F \sim F_1$.

Sličnost bi neformalno mogli da opišemo kao:

Sličnost je preslikavanje neke figure F u figuru F_1 tako da je razmera odgovarajućih duži figura F i F_1 isti broj i ako su odgovarajući uglovi jednaki.

Za utvrđivanje sličnosti trouglova koristimo četiri stava:



I stav

Dva trougla ABC i $A_1B_1C_1$ su slična ako i samo ako je jedan par stranica jednog trougla proporcionalan paru stranica drugog, a uglovi zahvaćeni ovim stranicama jednaki su među sobom.

II stav

Trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su slični ako i samo ako su dva ugla jednog trougla jednaka sa dva odgovarajuća ugla drugog.

III stav

Trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su slični ako i samo ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

IV stav

Dva trougla ABC i $A_1B_1C_1$ su slična ako i samo ako su dve stranice jednog trougla proporcionalne odgovarajućim stranicama drugog, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih stranica jednaki, a naspram drugih dveju odgovarajućih stranica su oba ugla oštra, oba prava ili oba tupa.

U zadacima , pošto zaključimo da su neka dva trougla slična, primenjujemo :

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1 = k$$

Naravno :

$O = a + b + c$ je obim prvog trougla a

$O_1 = a_1 + b_1 + c_1$ je obim drugog trougla

k je koeficijent sličnosti

Ovu gornju jednakost možemo zapisati i sa : $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$

Vrlo lako možemo zaključiti da važe i sledeće proporcionalnosti:

$$a : a_1 = t_a : t_{a_1} = h_a : h_{a_1}$$

$$b : b_1 = t_b : t_{b_1} = h_b : h_{b_1}$$

$$c : c_1 = t_c : t_{c_1} = h_c : h_{c_1}$$

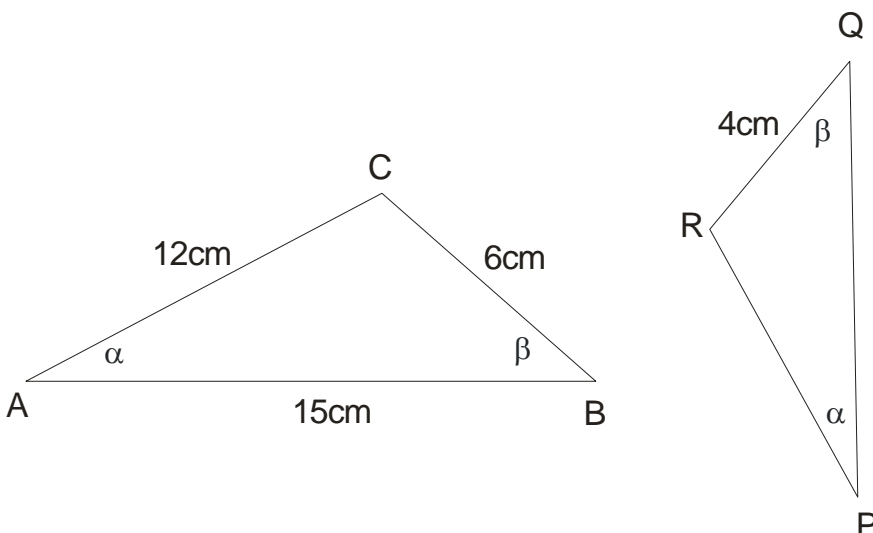
$$P : P_1 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2$$

Naravno ovde su :

t - težišne duži, h – visine i P – površine sličnih trouglova.

primer 1.

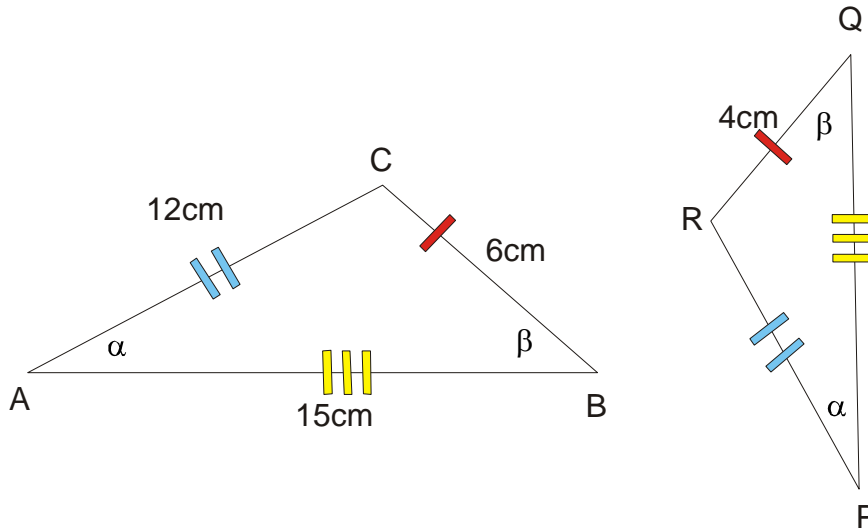
Na crtežu su dati podaci o trouglovima ABC i PQR. Odrediti dužine stranica PQ i PR trougla PQR.



Rešenje:

Uočimo najpre da su trouglovi slični po II stavu o sličnosti trouglova. Dalje predložimo da sa crticama obeležite koja kojoj stranici odgovara.

Pogledajte na sledećoj slici:



Kako imamo podatke za najmanje duži (sa po jednom crvenom crtkom) one će biti na početku proporcije...

$$BC : RQ = AC : PR$$

$$6 : 4 = 12 : PR$$

$$6 \cdot PR = 4 \cdot 12$$

$$PR = \frac{48}{6}$$

$$PR = 8cm$$

$$BC : RQ = AB : PQ$$

$$6 : 4 = 15 : PQ$$

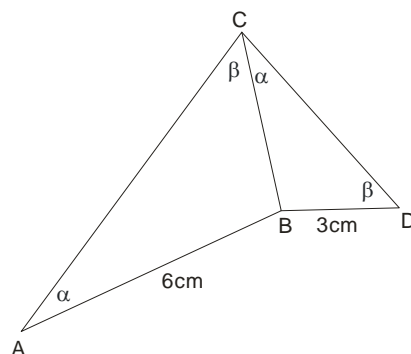
$$6 \cdot PQ = 4 \cdot 15$$

$$PQ = \frac{60}{6}$$

$$PQ = 10cm$$

primer 2.

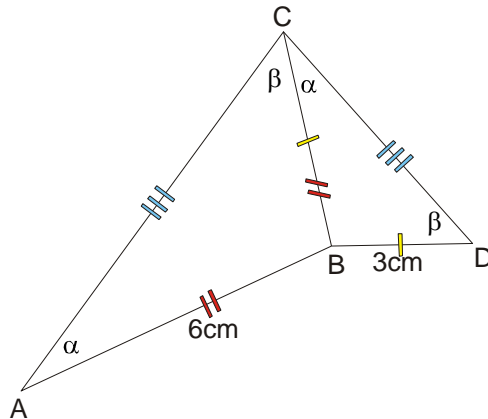
Ako su oznake i podaci kao na priloženom crtežu, odrediti dužinu zajedničke stranice BC trouglova ABC i CBD.



Rešenje:

Kao i u prethodnom primeru, trouglovi ABC i BCD su slični po II stavu, jer imaju po dva odgovarajuća ugla jednaka.

I ovde ćemo upotrebiti trik sa crticama...



Uočimo dalje da nam stranice sa po tri crtice (najduže) ne trebaju, jer nijedna od njih nema datu dužinu.

Moramo paziti jer je zajednička stranica BC istovremeno najkraća za trougao ABC i srednja po dužini za trougao BDC.

Dakle:

$$AB : BC = BC : BD$$

$$6 : BC = BC : 3$$

$$BC \cdot BC = 6 \cdot 3$$

$$|BC|^2 = 18$$

$$BC = \sqrt{18}$$

$$BC = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

primer 3.

Stranice trougla ABC su $a = 12\text{cm}$, $b = 18\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$. Odrediti obim njemu sličnog trougla čija je najduža stranica 27cm .

Rešenje:

Ovde ćemo upotrebiti:

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1 = k$$

Najpre se pitamo : koja je to stranica u sličnom trouglu data?

Pa pošto je b najduža stranica u prvom trouglu , to je $b_1 = 27cm$.

Dalje računamo obim prvog trougla:

$$O = a + b + c$$

$$O = 12 + 18 + 8$$

$$O = 38cm$$

Sada koristimo deo ove velike proporcije koji nam treba:

$$b : b_1 = O : O_1$$

$$18 : 27 = 38 : O_1$$

$$18 \cdot O_1 = 27 \cdot 38$$

$$O_1 = \frac{27 \cdot 38}{18}$$

$$O_1 = 57cm$$

primer 4.

Dva trougla su slična. Zbir dve odgovarajuće visine je 121cm a koeficijent sličnosti je 1,75. Odrediti visine.

Rešenje:

Recimo da se radi o visinama koje odgovaraju stranici a , odnosno a_1 . Tada je: $h_a + h_{a_1} = 121$

A pošto znamo koeficijent sličnosti, onda je $h_a : h_{a_1} = 1,75$. Upakujmo sad ove dve jednakosti:

$$h_a : h_{a_1} = 1,75 \rightarrow h_a = 1,75 \cdot h_{a_1}$$

$$h_a + h_{a_1} = 121$$

$$1,75 \cdot h_{a_1} + h_{a_1} = 121$$

$$2,75 \cdot h_{a_1} = 121$$

$$h_{a_1} = \frac{121}{2,75}$$

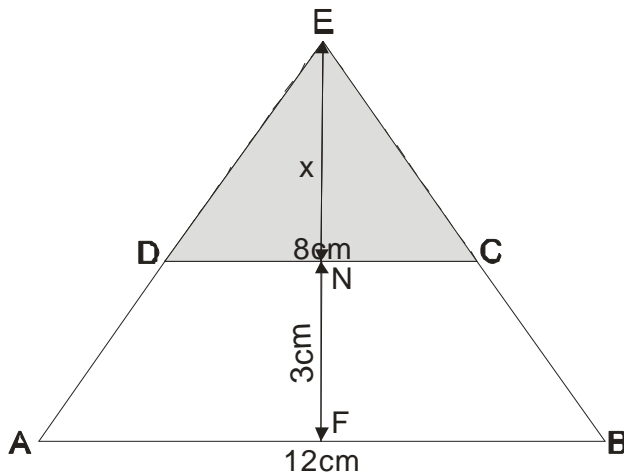
$$h_{a_1} = 44cm$$

$$h_a = 1,75 \cdot h_{a_1} \rightarrow h_a = 1,75 \cdot 44 \rightarrow h_a = 77cm$$

primer 5.

Osnovice jednakokrakog trapeza ABCD su 12cm i 8cm, a njegova visina 3cm. Ako se prave AD i BC seku u tački E, odrediti dužinu visine EF trougla ABE.

Rešenje:



Uočimo slične trouglove ABE i DCE , koji kao i u prethodnim zadacima imaju jednake uglove.

Uočimo visinu trougla ABE koja je očigledno $EF = 3 + x$ i visinu trougla DCE koja je $EN = x$.

$$a : a_1 = h_a : h_{a_1}$$

$$12 : 8 = (3 + x) : x$$

$$12x = 8(3 + x)$$

$$12x = 24 + 8x$$

$$12x - 8x = 24$$

$$4x = 24$$

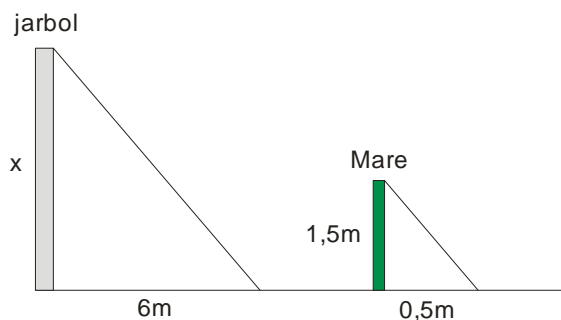
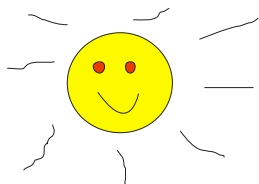
$$x = 6 \text{ cm}$$

Dakle, visina trougla $EF = 3 + x = 3 + 6 = 9 \text{ cm}$

primer 6.

Marko je visok 1,5 m i stoji pored jarbola koji je ortogonalan na vodoravnom pločniku. U jednom trenutku, dužine senki Marka i jarbola su 0,5 m i 6 m. Odrediti visinu tog jarbola.

Rešenje:



Uočimo slične trouglove i postavimo proporciju:

$$x : 1,5 = 6 : 0,5$$

$$0,5 \cdot x = 6 \cdot 1,5$$

$$x = \frac{6 \cdot 1,5}{0,5}$$

$$x = 6 \cdot 3 \rightarrow x = 18m$$

Naravno , sličnost se primenjuje i kod četvorouglova, petouglova...

Evo par primera:

primer 7.

Stranice četvorougla odnose se kao 20:15:9:8 , a zbir dve manje stranice njemu sličnog četvorougla je 25,5cm. Odrediti stranice drugog četvorougla.

Rešenje:

$$a : b : c : d = 20 : 15 : 9 : 8 \rightarrow \boxed{a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = 20 : 15 : 9 : 8}$$

Iz proporcije vidimo da su najmanje stranice c i d , odnosno c_1 i d_1 .

$$\text{Onda mora biti: } c_1 + d_1 = 25,5$$

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = 20 : 15 : 9 : 8 \rightarrow$$

$$a_1 = 20k$$

$$b_1 = 15k$$

$$c_1 = 9k$$

$$d_1 = 8k$$

Ovo zamenimo u :

$$c_1 + d_1 = 25,5 \rightarrow 9k + 8k = 25,5 \rightarrow 17k = 25,5 \rightarrow k = \frac{25,5}{17} \rightarrow \boxed{k = 1,5}$$

$$a_1 = 20k \rightarrow a_1 = 20 \cdot 1,5 \rightarrow \boxed{a_1 = 30cm}$$

$$b_1 = 15k \rightarrow b_1 = 15 \cdot 1,5 \rightarrow \boxed{b_1 = 22,5cm}$$

$$c_1 = 9k \rightarrow c_1 = 9 \cdot 1,5 \rightarrow \boxed{c_1 = 13,5cm}$$

$$d_1 = 8k \rightarrow d_1 = 8 \cdot 1,5 \rightarrow \boxed{d_1 = 12cm}$$

primer 8.

Stranice petougla su 35mm,14mm,28mm,21mm i 42mm. Najmanja stranica njemu sličnog petougla je 12mm. Odrediti dužine ostalih stranica ovog petougla.

Rešenje:

$$a = 35mm$$

$$b = 14mm$$

$$c = 28mm$$

$$d = 21mm$$

$$e = 42mm$$

U zadatku kaže najmanja stranica sličnog petougla je 12mm, jasno je da to mora biti $b_1 = 12mm$

Kako važi da je :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1} = k$$

$$\frac{b}{b_1} = k \rightarrow k = \frac{14}{12} \rightarrow \boxed{k = \frac{7}{6}}$$

Našli smo koeficijent sličnosti, vraćamo se da nadujemo dužine ostalih stranica...

$$a = 35\text{mm} \wedge \rightarrow \frac{a}{a_1} = k \rightarrow a_1 = \cancel{35} \cdot \frac{6}{7} = 5 \cdot 6 = 30\text{mm}$$

$$b = 14\text{mm} \wedge \rightarrow \frac{b}{b_1} = k \rightarrow b_1 = \cancel{14} \cdot \frac{6}{7} = 2 \cdot 6 = 12\text{mm}$$

$$c = 28\text{mm} \wedge \rightarrow \frac{c}{c_1} = k \rightarrow c_1 = \cancel{28} \cdot \frac{6}{7} = 4 \cdot 6 = 24\text{mm}$$

$$d = 21\text{mm} \wedge \rightarrow \frac{d}{d_1} = k \rightarrow d_1 = \cancel{21} \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot 6 = 18\text{mm}$$

$$e = 42\text{mm} \wedge \rightarrow \frac{e}{e_1} = k \rightarrow e_1 = \cancel{42} \cdot \frac{6}{7} = 7 \cdot 6 = 42\text{mm}$$