POLINOMI SA JEDNOM PROMENLJIVOM

Oblika su:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}$$

Ovaj oblik se dobija "sredjivanjem" polinoma (sabiranjem, oduzimanje...) i naziva se kanonički, x-je promenljiva $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ su koeficijenti (konstante), n je prirodan broj ili nula.

Ako je $a_n \neq 0$, onda kažemo da je polinom P stepena n, pa je a_n ''najstariji'' koeficijenat.

Primer: $P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$

- ovaj polinom je stepena 3 a najstariji koeficijenat je 4.

- **zanimljivo** je da se član bez *x*-sa, takozvani slobodni član dobija kad umesto x stavimo 0, tj. $P(0) = 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 7 = 7 \to \quad P(0) = 7$, ili za polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \to P(0) = a_0$

- takodje ako umesto x stavimo 1 imamo $P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_0$

SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA:

Primer: $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7$

$Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$

$$P(x) + Q(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6x - 7) + (4x^3 - 2x^2 + 12x + 3)$$

$$= \underline{3x^3} - \underline{\underline{4x^2}} + \underline{\underline{\underline{6x}}} - 7 + \underline{4x^3} - \underline{\underline{2x^2}} + \underline{\underline{\underline{12x}}} + 3$$

$=$ krenemo sa sabiranjem članova sa najvećim stepenom pa dok ne dodjemo do ''slobodnih članova'', to jest onih bez *x*-sa

$$\boxed{= 7x^3 - 6x^2 + 18x - 4}$$

$$P(x) - Q(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6x - 7) - (4x^3 - 2x^2 + 12x + 3)$$

$=$ **pazi: Minus ispred zagrade menja znak <u>svim</u> članovima u zagradi**

$$= \underline{3x^3} - \underline{\underline{4x^2}} + \underline{\underline{\underline{6x}}} - 7 - \underline{4x^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{\underline{\underline{12x}}} - 3$$

$$= \boxed{-x^3 - 2x^2 - 6x - 10}$$

Najbolje je da podvlačite **slične monome** kako se ne bi desila greška u sabiranju (oduzimanju)

MNOŽENJE POLINOMA

Primer 1. Pomnožiti sledeće polinome:

$$P(x) = 2x - 3$$
$$Q(x) = x^2 + 4x - 7$$

Rešenje:

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x - 3) \cdot (x^2 + 4x - 7)$$

Kako množiti?

Množi se ''svaki sa svakim''. **Najbolje je da prvo odredimo znak** $(+ \cdot + = +, \; - \cdot - = +, \; + \cdot - = -, \; - \cdot + = -)$, onda pomnožimo brojke i na kraju nepoznate.
Naravno da je $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, itd. (ovde koristimo pravila iz stepenovanja: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$)
Vratimo se na zadatak:

$$(2x - 3) \cdot (x^2 + 4x - 7) =$$

$2x^3 + 8x^2 - 14x - 3x^2 - 12x + 21 =$ sad saberemo(oduzmemo) slične monome

$= 2x^3 + 5x^2 - 26x + 21$

Primer 2. Pomnožiti sledeće polinome:

$$A(x) = -x^2 + 4x - 7$$
$$B(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (-x^2 + 4x - 7) \cdot (2x^2 + 5x + 1) \\ &= -2x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x^3 + 20x^2 + 4x \; - 14x^2 - 35x - 7 \\ &= -2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 31x - 7 \end{aligned}$$

DELJENJE POLINOMA

Podsetimo se najpre deljenja brojeva.

Primer: $57146 : 23 = 2484$

$$
\begin{array}{l}
57146 : 23 = 2484 \\
\underline{-46} \\
\ \ 111 \\
\ \underline{-92} \\
\ \ \ 194 \\
\ \ \underline{-184} \\
\ \ \ \ 106 \\
\ \ \ \underline{-92} \\
\ \ \ \ \ \ 4 \text{ - } \textit{ostatak}
\end{array}
$$

Možemo zapisati: $\dfrac{57146}{23} = 2848 + \dfrac{4}{23}$

$$\boxed{\dfrac{deljenik}{delilac} = rešenje + \dfrac{ostatak}{delilac}}$$

Probajmo sad sa polinomima:

Primer 1:

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = 2x - 1 \\
\underline{{}_{(-)}2x^2 -{}_{(+)}4x} \\
\qquad -x + 6 \\
\qquad \underline{\underset{+}{-}x \underset{-}{+} 2} \\
\qquad\qquad 4 \rightarrow \text{Ostatak}
\end{array}
$$

Dakle:

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 2x - 1 + \frac{4}{x - 2}$$

POSTUPAK

→ Podelimo ‘’prvi sa prvim’’ $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$
i upišemo 2x u rešenju
→ 2x pomnožimo sa deliocem i potpišemo
ispod 2x²-5x
→ promenimo znake (ono u zagradi)
→ prvi se uvek skrate a druge saberemo
-5x+4x=-x
→ dopišemo +6
→ opet delimo ‘’prvi sa prvim’’ $\dfrac{-x}{x} = -1$
→ množimo sa deliocem
→ promenimo znake i saberemo

Primer 2:

$(x^3+2x^2-4x+5):(x+1)=x^2+x-5$

$\underline{{}_{(-)}x^3 \underset{(-)}{+} x^2}$

x^2-4x

$\underline{{}_{(-)}x^2 \underset{(-)}{+} x}$

$-5x+5$

$\underline{\underset{(+)}{-}5x \underset{(+)}{-} 5}$

10

POSTUPAK

→ Podelimo ''prvi sa prvim'' $\frac{x^3}{x}=x^2$
upišemo x^2 u rešenje
→ x^2 pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod x^3+2x^2
→ promenimo znake kod x^3+2x^2
→ prvi se uvek ''skrate'', a $2x^2-x^2=x^2$
→ spustimo - 4x
→ opet ''prvi u prvom'' $\frac{x^2}{x}=x$
→ x množimo sa deliocem
→ menjamo znake kod x^2+x
→ prvi se skrate a -4x-x=-5x
→ spuštamo +5
→ $\frac{-5x}{x}=-5$
→ -5·(x+1)=-5x-5
→ promenimo znake i prvi se skrate
→ 5+5=10

Dakle:

$$\frac{x^3+2x^2-4x+5}{x+1}=x^2+x-5+\frac{10}{x+1}$$

Primer 3:

$(x^4-3x^3+2x^2+x-5):(x^2+2x-3)=x^2-5x+15$

$\underline{{}_{-}x^4 \underset{(-)}{+} 2x^3 \underset{(+)}{-} 3x^2}$

$-5x^3+5x^2+x$

$\underline{\underset{(+)}{-}5x^3 \underset{(+)}{-}10x^2 \underset{(-)}{+}15x}$

$15x^2-14x-5$

$\underline{{}_{(-)}15x^2 \underset{(-)}{+} 30x \underset{(+)}{-} 45}$

$-44x+40 \rightarrow$ ostatak

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2+x-5}{x^2+2x-3}=x^2-5x+15+\frac{-44x+40}{x^2+2x-3}$$

Primer 4:

$$(x^4-1):(x-1)=x^3+x^2+x+1$$
$$\underset{(-)}{}x^4 \underset{(+)}{-} x^3$$
$$+x^3-1$$
$$\underset{(-)}{+}x^3 \underset{(+)}{-} x^2$$
$$x^2-1$$
$$\underset{(-)}{}x^2 \underset{(+)}{-} x$$
$$x-1$$
$$\underset{(-)}{}x \underset{(+)}{-} 1$$

Nema ostatka

PAZI:

Kad skratimo ''prve'' a drugi nisu istog stepena prepišemo ih, prvo onaj sa većim pa sa manjim stepenom, to jest: $+x^3-1$

Dakle: $\dfrac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1$

U nekim zadacima interesovaće nas samo ostatak koji se dobija deljenjem dvaju polinoma a ne i količnik. Tu nam pomaže **Bezuova teorema:**

Ostatak pri deljenju polinoma P(x) sa (x-a) jednak je P(a), to jest vrednosti

polinoma P(x) u tački x = a. Ako je P(a)=0, deljenje je bez ostatka.

Primer1: *Nadji ostatak pri deljenju polinoma* x^3-5x^2+6x-7 *sa* $x-2$

Najpre rešimo x-2=0, pa je **x = 2**

onda uporedjujemo x-a i x-2→ *a=2*

Sada je
$$P(x)=x^3-5x^2+6x-7$$
$$P(2)=2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2-7$$
$$P(2)=8-20+12-7$$
$$P(2)=-7 \Rightarrow$$ **Ostatak je -7**

www.matematiranje.com

Primer2: *Nadji ostatak pri deljenju polinoma* $2x^3 - 5x + 6$ *sa* $x+1$

Pazi , ovde je *a = -1*, jer je x+1=0
x = -1

$P(x) = 2x^2 - 5x + 6$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6$

$P(-1) = 2 + 5 + 6$

$P(-1) = 13 \Rightarrow$ Ostatak je 13

Još jedna izuzetna primena Bezueve teoreme je kod rastavljanja polinoma na činioce. Mi smo do sada naučili da faktorišemo polinome drugog stepena. Za polinome trećeg i četvrtog stepena postoje algoritmi, ali su suviše teški, dok za polinome petog i većeg stepena ne postoji univerzalan način da se faktorišu, odnosno reše.
Kako nam to pomaže Bezuova teorema?

Primer1: Dat je polinom $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ **Izvrši njegovu faktorizaciju.**

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

za x=1

$P(x) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6$

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6$

$P(1) = 0$

POSTUPAK

→ uočimo ‘’slobodan’’ član, to jest onaj bez x-sa.
ovde je to 6.
→ on se može podeliti: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6
→redom zamenjujemo ove brojeve dok ne dobijemo da je $P(a) = 0$
→ našli smo da je *a=1*
→ podelimo polinom sa $(x-a) = (x-1)$

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\underset{(-)}{x^3} \underset{(+)}{- x^2}} \\
\quad -5x^2 + 11x \\
\quad \underline{\underset{(+)}{-5x^2} \underset{(-)}{+5x}} \\
\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{\underset{(-)}{6x} \underset{(+)}{- 6}}
\end{array}$$

Nema ostatka

Ovim smo smanjili stepen polinoma i sad već $x^2 - 5x + 6$ znamo da rastavljamo

$$\begin{aligned}
x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 2x - 3x + 6 \\
&= x(x-2) - 3(x-2) \\
&= (x-2)(x-3)
\end{aligned}$$

Dakle: $\boxed{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)}$

Primer 2:

Izvršiti faktorizaciju polinoma:

$P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x + 4$

Posmatrajmo broj 4 (slobodan član). Pošto njega možemo podeliti sa +1, -1, +2, -2,+4, -4, redom menjamo u polinom dok ne bude P(a)=0

Za x = 1 $P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 2 - 3 + 4 + 4$

$P(1) = 4 \neq 0$

Idemo dalje:

Za x = -1

$$P(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 4$$

$$P(-1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$$

Dakle, delimo sa $x - (-1) = x + 1$

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) : (x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\underset{(-)}{x^4} \underset{(-)}{+ x^3}$$

$$-3x^3 - 3x^2$$

$$\underset{(+)}{-3x^3} \underset{(+)}{-3x^2}$$

$$4x + 4$$

$$\underset{(-)}{4x} \underset{(-)}{+ 4}$$

Dalje gledamo $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Za x=-1 $P_1(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$

Opet delimo sa (x+1)

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4$$

$$\underset{(-)}{x^3} \underset{(-)}{+ x^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$-4x^2 + 4$$

$$\underset{(+)}{-4x} \underset{(+)}{-4x}$$

Konačno rešenje je: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x+1)(x^2 - 4x + 4)$

$$= (x+1)^2 (x-2)^2$$

<u>Primer 3:</u>

Odrediti realan parametar m tako da polinom $P(x) = x^5 + mx^3 + 3x^2 - 2x + 8$ bude deljiv sa x + 2.

Rešenje:

Iz x+2 = 0 je x = -2 , pa je *a = -2*

$P(x) = x^5 + mx^3 + 3x^2 - 2x + 8$

$P(-2) = (-2)^5 + m(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) + 8$

$P(-2) = -32 - 8m + 12 + 4 + 8$

$P(-2) = -8m - 8$

$\boxed{P(-2) = 0}$ jer u zadatku kaže da je P(x) deljiv sa -2

$-8m - 8 = 0$

$\boxed{m = -1}$

<u>Primer 4:</u>

Odrediti realne vrednosti parametara *a* i *b* tako da polinom $P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$

pri deljenju sa $x+1$ **daje ostatak 6, a pri deljenju sa** $x-1$ **daje ostatak 2.**

Rešenje:

Kako pri deljenju sa $x+1$ daje ostatak 6, to je $\boxed{P(-1) = 6}$

$P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$

$P(-1) = a(-1)^3 - b(-1)^2 - 5(-1) + 4$

$P(-1) = -a - b + 9$

$-a - b + 9 = 6$

$-a - b = -3$

$\boxed{a + b = 3}$

Kako pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 2, to je $\boxed{P(1)=2}$

$P(x)=ax^3-bx^2-5x+4$

$P(1)=a\cdot1^3-b\cdot1^2-5\cdot1+4$

$P(1)=a-b-1$

$a-b-1=2$

$\boxed{a-b=3}$

Dalje oformimo sistem jednačina:

$a+b=3$

$\underline{a-b=3}$

$a\cancel{+b}=3$

$\underline{a\cancel{-b}=3}$

$2a=6\rightarrow a=3\rightarrow b=0$

Rešenja su $a=3,b=0$

www.matematiranje.com