NEKE VAŽNE NEJEDNAKOSTI:

1) $x^2 \geq 0$ za sve $x \in R$

Kvadrat nekog izraza je uvek pozitivan ili jednak nuli (za x=0)

Primeri: $\rightarrow\ x^2+4x+4=(x+2)^2 \geq 0$ za $\forall x \in R$

$\rightarrow\ -a^2+2a-1=-(a-1)^2 \leq 0$ za $\forall a \in R$

$\rightarrow\ x^2-xy+y^2 \geq 0$ jer

$$x^2-xy+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$$

Izvršili smo dopunu od "punog kvadrata" pa je $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ i $\frac{3y^2}{4} \geq 0$, a onda je i njihov zbir ≥ 0

2) $\frac{x^2+y^2+z^2+3}{2} \geq x+y+z$

Dokaz:
$$\begin{aligned}(x-1)^2 &\geq 0\\ (y-1)^2 &\geq 0\\ (z-1)^2 &\geq 0\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0\\ &x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1 \geq 0\\ &x^2+y^2+z^2+3 \geq 2x+2y+2z\\ &x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(x+y+z)\\ &\frac{x^2+y^2+z^2+3}{2} \geq x+y+z\end{aligned}$$

3) Dokazati da za $\forall a>0 \ \Rightarrow\ a+\frac{1}{2} \geq 2$

Dokaz:

$$(a-1)^2 \geq 0$$
$$a^2-2a+1 \geq 0$$
$$a^2+1 \geq 2a \,/:a \quad \text{(podelimo sa } a\text{)}$$
$$a+\frac{1}{a} \geq 2$$

4) Dokazati da za $\forall x \geq 0$ i $\forall y \geq 0$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

(geometrijska sredina ≤ aritmetička sredina)

Dokaz:

Podjimo od $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

$$\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y = 2\sqrt{xy} \ /:2$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Naravno jednakost važi ako je $x = y$

5) Dokazati da je: $\forall x, y, z$ koji su nenegativni:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Dokaz:

Uvodimo najpre smene: $x = a^3$

$y = b^3$

$z = c^3$

Treba onda dokazati:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$3abc \leq a^3+b^3+c^3$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$$

Kako je $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$
(proveri množenjem)

odavde je $a+b+c \geq 0$ sigurno

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$$

Dakle proizvod dva takva izraza je ≥ 0 pa je zaista: $abc \leq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

Odnosno $\sqrt[3]{xyz} \leq \dfrac{x+y+z}{3}$

<u>Pazi: Znak = je ako je</u> $x = y = z$