

## KONSTRUKTIVNI ZADACI (TROUGAO)

Rešavanje konstruktivnih zadataka je jedna od najtežih oblasti koja vas čeka ove godine. Zahteva dobro predznanje, poznavanje odgovarajuće teorije . Zato vam mi preporučujemo da se najpre podsetite teorije vezane za trougao ( imate sve na sajtu).

Rešavanje konstruktivnog zadatka se sastoji od 4 etape:

- 1) *Analiza*
- 2) *Konstrukcija*
- 3) *Dokaz*
- 4) *Diskusija*

Analiza je traženje načina da se dodje do rešenja. Predpostavimo da traženi trougao već postoji, nacrtamo pomoćni crtež i na njemu unesemo date podatke . Tražimo vezu između tih podataka, zavisnost, a ponekad treba doctati neki deo trougla , itd.

Konstrukcija se sastoji u tome da na osnovu zaključaka iz analize konstruišemo traženi trougao.

Dokaz se sastoji u tome da pomoću poznatih aksioma i teorema utvrdimo da li dobijeno rešenje ispunjava uslove zadatka. Profesori ovde najčešće umesto dokaza zahtevaju od učenika da opišu način na koji su konstruisali traženi trougao. Vi radite kako vaš profesor zahteva...

### Diskusija

Ovde razmišljamo da li je dobijeno rešenje jedinstveno, da li ima 2, 3 ili više rešenja...ili pak rešenje ne postoji.

### Napomena

Mi ćemo ovde pokušati da vam pomognemo da pravilno razmišljate i da naučite par trikova... Nećemo raditi dokaz i diskusiju, jer jedan pravilno urađen konstruktivni zadatak je kao pisanje referata... Ko voli neka pokuša sam da izvede dokaz a ako bude nekih problema, pišite nam pa ćemo vam pomoći.

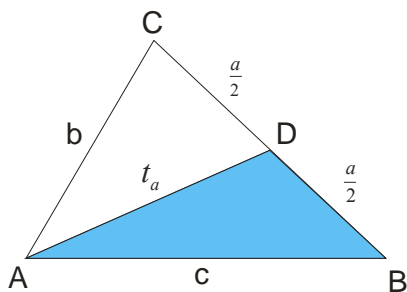
### Primer 1.

Konstruisati trougao ABC ako je on zadat sledećim elementima :  $a, c, t_a$

### Rešenje

Ovo je jedan od lakših zadataka, za zagrevanje.

Nacrtamo sliku i izvršimo analizu...



Znamo da težišna duž spaja teme i sredinu naspramne stranice. Obeležimo tu tačku sa D.

Trougao ABD je moguće konstruisati jer znamo sve tri stranice ( $c, t_a, \frac{a}{2}$ ).

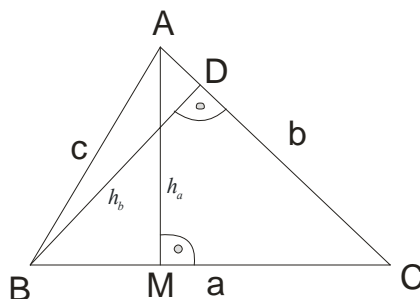
Nacrtamo polupravu  $A_x$  i na njoj nanesimo dužinu  $AB = c$ . U otvor šestara uzmemo dužinu  $t_a$ , ubodemo šestar u tačku A i opišemo luk. Zatim u otvor šestara uzmemo  $\frac{a}{2}$ , zabodemo šestar u tačku B i presećemo malopre naneti luk. Dobili smo tačku D. Produžimo stranicu BD za  $\frac{a}{2}$  i tu je tačka C. Spojimo tačke A i C i eto ga traženi trougao.

### Primer 2.

Konstruisati trougao ABC ako je on zadat sledećim elementima :  $a, h_a, h_b$

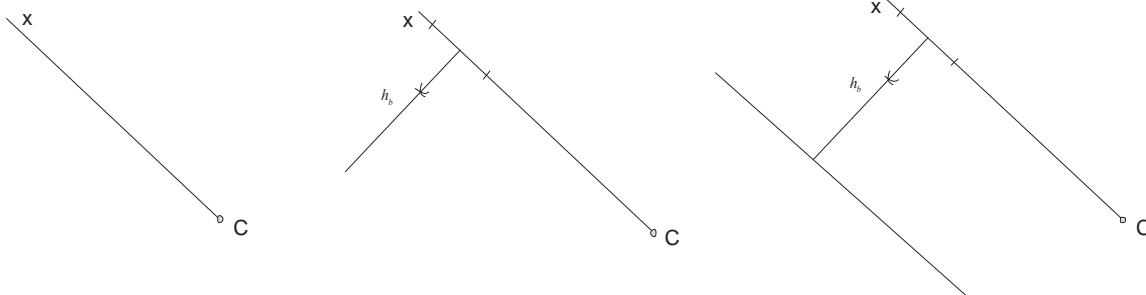
### Rešenje

Nacrtajmo sliku i analizirajmo je...



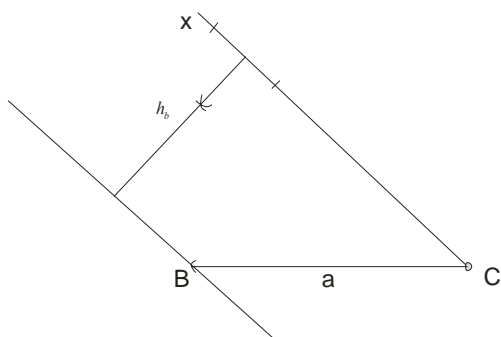
Ovde ćemo upotrebiti trik sa nanošenjem visine “na stranu”...

Najpre nacrtamo polupravu  $Cx$

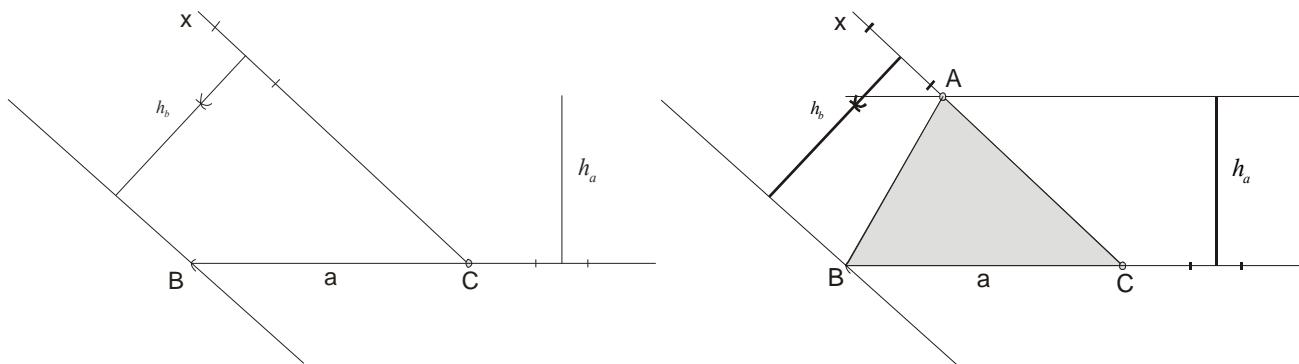


Na njoj, «na stranu» naneseemo visinu  $h_b$  i povučemo paralelu sa  $Cx$ . Na toj paraleli se nalazi tačka B. Ali gde?

U otvor šestara uzmemo dužinu stranice  $a$  i iz C presečemo lukom paralelu. Tu je tačka B.



Sada da dođemo do tačke A. Opet trik sa visinom... Produžimo stranicu BC na jednu stranu i naneseemo visinu  $h_a$ .



Paralela sa BC u preseku sa  $Cx$  nam daje tačku A.

I konstruisali smo traženi trougao.

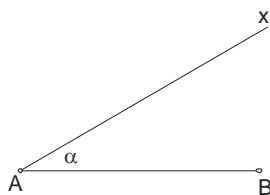
**Primer 3.**

Konstruisati skup svih tačaka iz kojih se data duž  $AB$  vidi pod datim uglom  $\alpha$ .

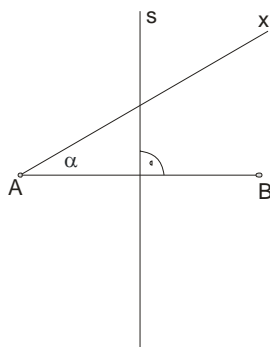
**Rešenje**

Ovo je jedna pomoćna konstrukcija koja se često javlja u zadacima, pa smatramo da je pametno da je detaljno objasnimo...

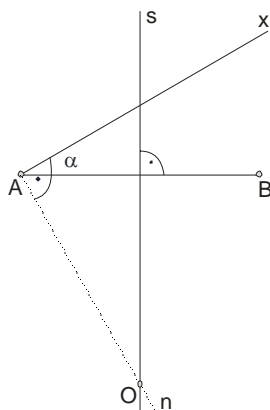
Nacrtamo datu duž i u tački  $A$  konstruišemo taj dati ugao  $\alpha$ .



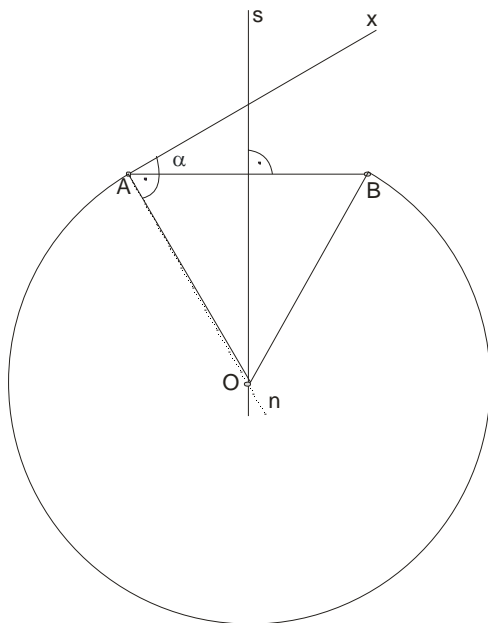
Dalje konstruišemo simetralu duži  $AB$ .



Na polpravu  $Ax$  konstruišemo normalu  $An$  u tački  $A$ .

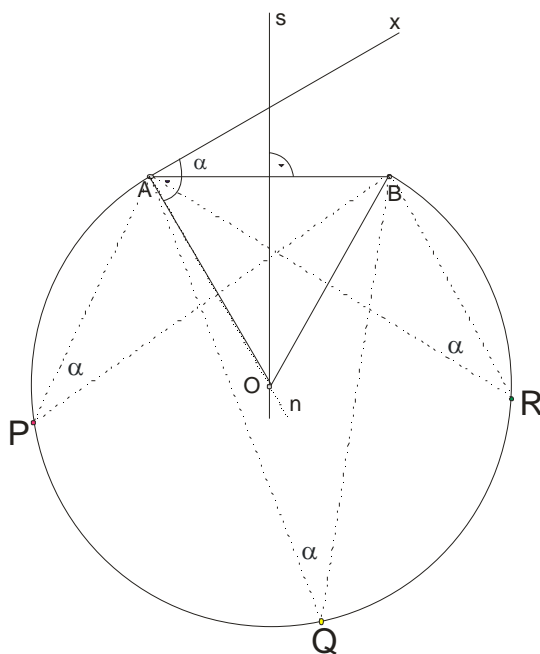


Dobijeni presek simetrale i normale, tačka O, je centar kruga poluprečnika  $OA = OB$



Iz svake tačke luka AB se data duž vidi pod uglom  $\alpha$ .

Za recimo ,proizvoljne tačke P,Q,R na luku AB je



***Napomena***

Dokaz i izvođenje ove konstrukcije se bazira na teoremi o tangentnom uglu:

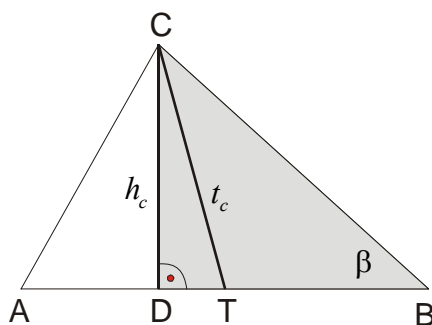
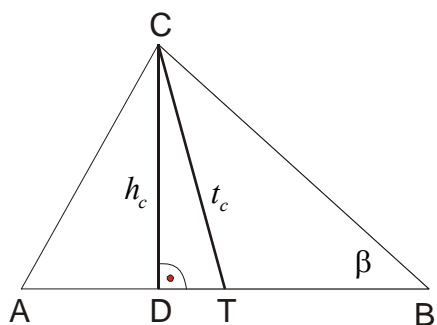
**Ugao koji određuje tetiva sa tangentom u jednoj krajnjoj tački tetive ( tangentni ugao) jednak je tetivnom uglu koji odgovara toj tetivi.**

**Primer 4.**

Konstruisati trougao  $ABC$  ako je on zadat sledećim elementima :  $\beta, h_c, t_c$

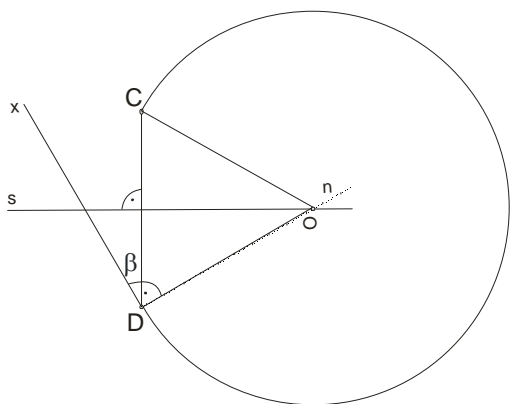
**Rešenje**

Skica i analiza...

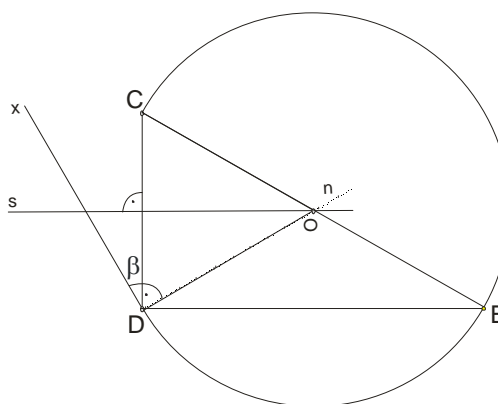


Najpre ćemo konstruisati označeni trougao  $DBC$ . Kako?

Pa upotrebićemo prethodni zadatak i najpre konstruisati skup svih tačaka iz kojih se duž  $DC$  vidi pod uglom  $\beta$ .



slika 1

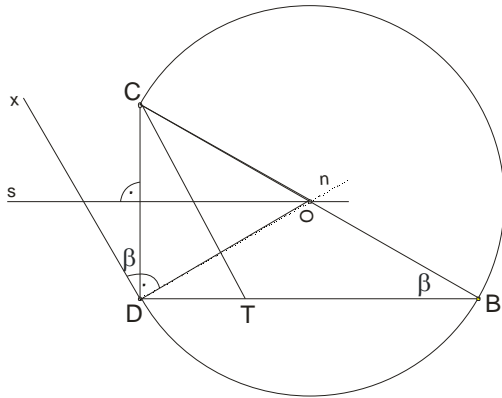


slika 2

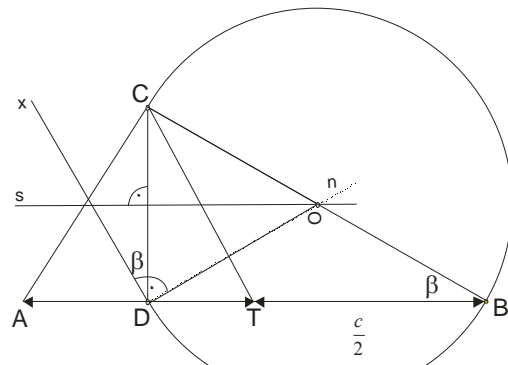
Na slici 1 smo bodili traženi luk  $CD$ , tj. svih tačaka iz kojih se duž  $DC$  vidi pod uglom  $\beta$ .

Produžimo  $CO$  do preseka sa lukom  $CD$  i dobili smo tačku  $B$ .

Kako znamo dužinu  $t_c$ , nju nanesimo iz tačke C do preseka sa DB ( slika 3.)



slika 3



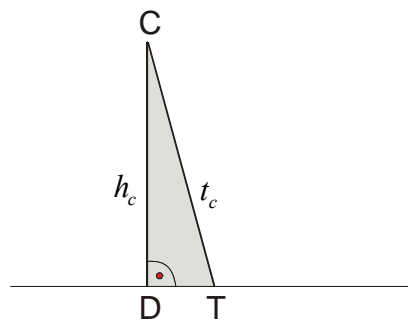
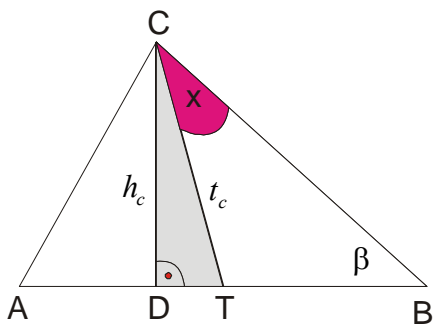
slika 4

I na kraju uzmemo rastojanje  $BT = \frac{c}{2}$  i preneseemo na drugu stranu (slika 4)... Eto je tačka A.

*Napomena*

Konstrukciju smo mogli izvesti i na **drugi način...**

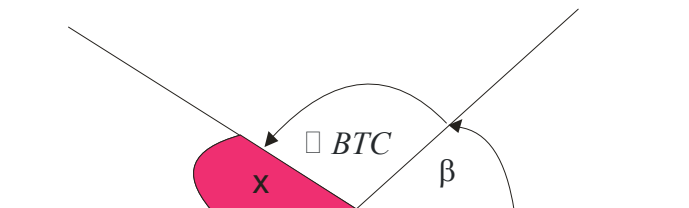
Najpre bi konstruisali trougao CDT.(imamo tri njegova elementa)



Šta dalje?

Ideja je da odredimo  $\sphericalangle TCB$  (ugao x na slici). Znamo ugao  $\beta$ , a sa slike znamo i  $\sphericalangle BTC$ .

Kako je zbir uglova u trouglu 180 stepeni, tj. opružen ugao, nanećemo dva poznata ugla  $\beta$  i  $\sphericalangle BTC$ , i šta ostane, to je traženi ugao x.

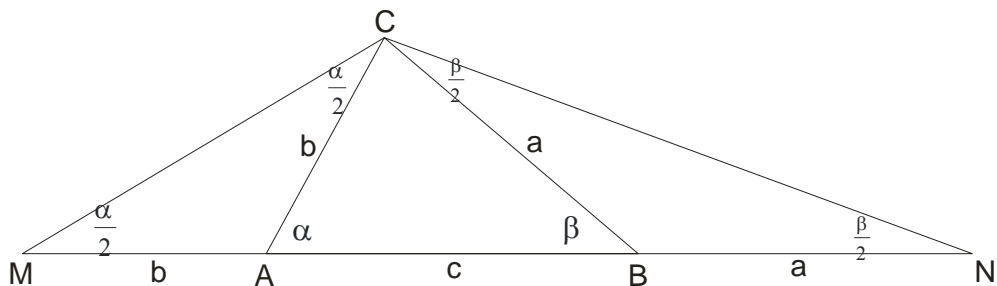


Kad dobijemo tačku B, nastavljamo kao i u prvom rešenju...

### Primer 5.

Konstruisati trougao ABC ako je on zadat sledećim elementima :  $a + b + c, \alpha, \beta$ .

### Rešenje



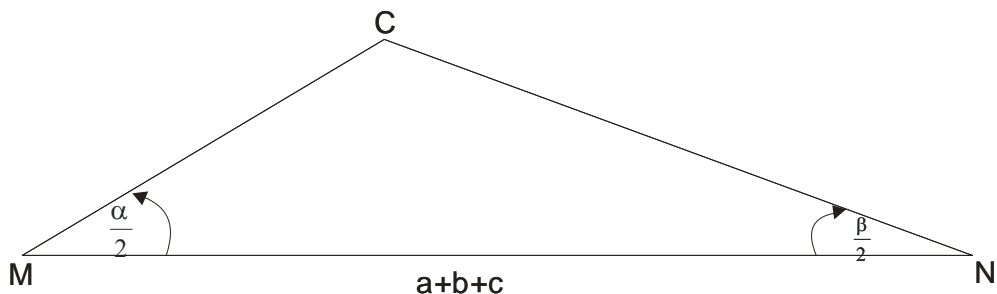
Uočimo sledeće činjenice:

Trouglovi AMC i BNC su jednakokraki. Kako je spoljašnji ugao jednak zbiru dva unutrašnja, nesusedna, to mora biti  $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACM = \frac{\alpha}{2}$  i  $\sphericalangle BNC = \sphericalangle BCN = \frac{\beta}{2}$

Sada možemo konstruisati trougao MNC.

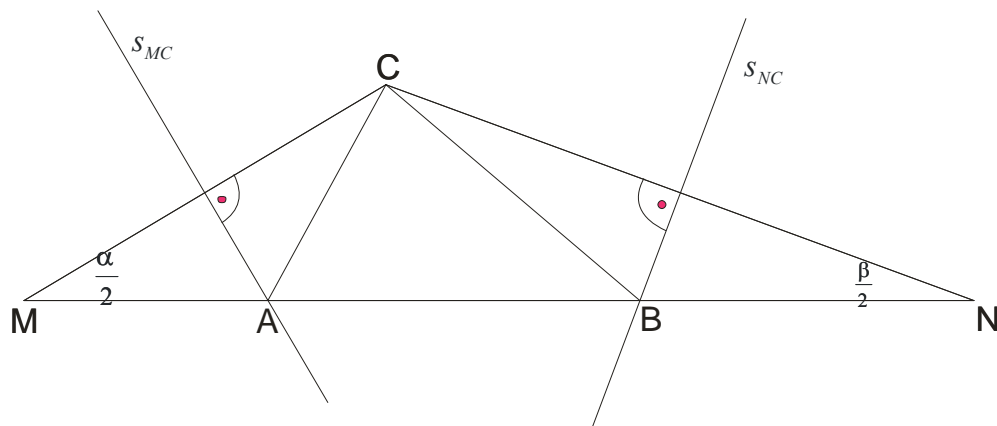
Nacrtamo polupravu Mx i na nju naneseemo  $a + b + c$ .

U temenu M naneseemo ugao  $\frac{\alpha}{2}$  a u temenu N naneseemo ugao  $\frac{\beta}{2}$ . U preseku je teme C.



### Kako doći do temena A i B?

Jednostavno, nađemo simetrale stranica MC i CN i u preseku sa MN su temena A i B.

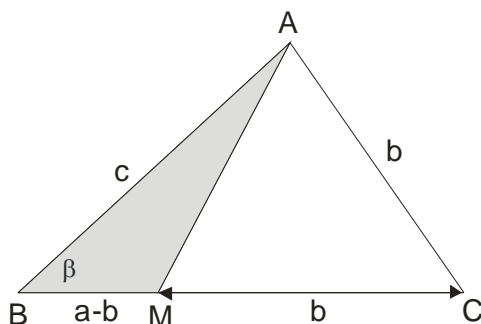


### Primer 6.

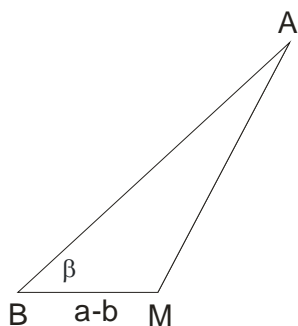
Konstruisati trougao  $ABC$  ako je on zadat sledećim elementima:  $a-b, c, \beta$

### Rešenje

Najpre skica, analiza i ideja...



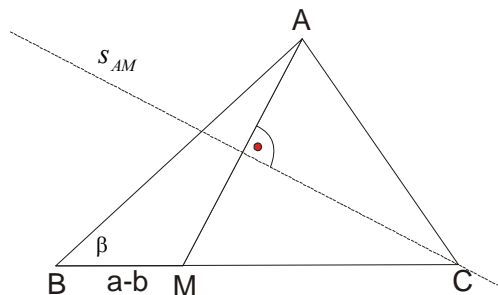
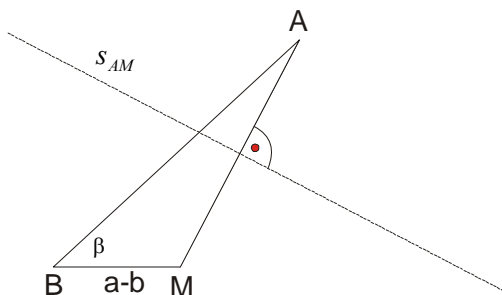
Na stranicu  $a$  prenesemo  $b$  da bi smo dobili zadato  $a-b$ . Uočimo trougao  $BMA$ . Njega je moguće konstruisati jer znamo tri potrebna elementa.



Kako doći do temena  $C$  ?

Trougao  $AMC$  je jednakokraki, pa ćemo naći simetralu stranice  $AM$ . Stranicu  $BM$  samo produžimo...

Presek simetrale i produžetka će nam dati teme  $C$ .



I dobili smo traženi trougao  $ABC$ .

