

FUNKCIONALNE JEDNAČINE, INVERZNA FUNKCIJA I KOMPOZICIJA FUNKCIJA

FUNKCIONALNE JEDNAČINE

Postupak rešavanja:

- i) “ Ono “ što je u zagradi stavimo da je t (smena)
- ii) Odatle izrazimo x
- iii) Vratimo se u početnu jednačinu , $f (t) = \dots$ i gde vidimo x zamenimo ga sa onim što smo izrazili
- iv) Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po t ” i **zamenimo t sa x**

ZADACI

1) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f (x+1) = x^2 - 3x + 2$

Rešenje:

$$f (x+1) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{“ Ono “ što je u zagradi stavimo da je } t$$

$$x + 1 = t \quad \text{Odatle izrazimo } x$$

$$x = t - 1 \quad \text{Vratimo se u početnu jednačinu , } f (t) = \dots \text{ i gde vidimo } x \text{ zamenimo ga sa onim što smo izrazili}$$

$$f (t) = (t - 1)^2 - 3 (t - 1) + 2$$

$$f (t) = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2 \quad \text{Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po } t \text{ ”}$$

$$f (t) = t^2 - 5t + 6 \quad \text{zamenimo } t \text{ sa } x$$

$$f (x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{i evo konačnog rešenja date funkcionalne jednačine.}$$

2) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$

Rešenje:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{1}{x} = t \quad \text{pa je odavde } \frac{1}{t} = x \quad \text{ovo zamenimo u datoj jednačini}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2}}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}$$

$$f(t) = \frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t} \quad \text{zamenimo t sa x} \quad f(x) = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad \text{je konačno rešenje}$$

3) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$$

$$\frac{x}{x+1} = t$$

$$x = t(x+1)$$

$$x = tx + t$$

$x - tx = t$ izvučemo x kao zajednički na levoj strani...

$$x(1 - t) = t$$

$$x = \frac{t}{1-t} \quad \text{vratimo se sad na početnu jednačinu...}$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \quad \text{zamenimo t sa x ...} \quad f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \quad \text{je konačno rešenje}$$

4) Reši funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x+3$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x+3$$

$$\frac{x+2}{2x+1} = t$$

$$x + 2 = t(2x + 1)$$

$$x + 2 = 2tx + t$$

$$x - 2tx = t - 2$$

$$x(1 - 2t) = t - 2$$

$$x = \frac{t - 2}{1 - 2t}$$

$$f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x + 3$$

$f(t) = 5 \frac{t-2}{1-2t} + 3$ sredimo... $f(t) = \frac{5t-10}{1-2t} + \frac{3(1-2t)}{1-2t} = \frac{5t-10+3-6t}{1-2t} = \frac{-t-7}{1-2t}$ izvučemo minus gore i ubacimo ga u imenilac, koji onda promeni redosled ... $A - B = -(B - A)$

$$f(t) = \frac{t+7}{2t-1}$$

$$f(x) = \frac{x+7}{2x-1} \text{ je konačno rešenje}$$

5) Ako je $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, izračunati $f(3)$.

Rešenje:

Najpre moramo naći $f(x)$.

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$$

$$\frac{x}{x+1} = t$$

$$x = t(x+1)$$

$$x = tx + t$$

$$x - tx = t$$

$$x(1-t) = t$$

$$x = \frac{t}{1-t} \text{ vraćamo se u početnu jednačinu...}$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$$

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t} - 1\right)^2 \quad \text{Sada umesto } t \text{ stavljamo } 3 \text{ jer se traži } f(3)\dots$$

$$f(3) = \left(\frac{3}{1-3} - 1\right)^2 = \frac{25}{4}$$

6) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Rešenje:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{uzimamo smenu } x + \frac{1}{x} = t, \text{ ako odavde probamo da izrazimo } x \text{ kao što bi trebalo,}$$

zapadamo u probleme...

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \text{sve pomnožimo sa } x \dots$$
$$x^2 + 1 = xt$$

$x^2 - xt + 1 = 0$ ovo je kvadratna jednačina po x i ne vodi rešenju...

TRIK : OVDE SMENU TREBAMO KVADRIRATI

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \text{kvadriramo...}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2 \quad \text{pokratimo } x\text{-seve...}$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \quad \text{E sad se vratimo u datu početnu jednačinu...}$$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{pa je } f(t) = t^2 - 2 \text{ odnosno } f(x) = x^2 - 2 \text{ je konačno rešenje}$$

7. Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$$

I ovaj zadatak ne možemo uraditi "klasično" već se moramo poslužiti trikom...

Ako uzmemo smenu $\frac{x-2}{x+1} = t$, onda je $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{t}$ i

$$\frac{x-2}{x+1} = t \text{ odavde } x-2 = t(x+1) \text{ pa je } x-2 = tx+t, \quad x-tx = t+2, \quad x(1-t) = t+2 \text{ i odavde je } x = \frac{t+2}{1-t}$$

Vratimo se u datu jednačinu:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{t+2}{1-t} \text{ dobili smo jednu jednačinu...E sad je trik da umesto } t \text{ stavimo } \frac{1}{t}$$

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t} + 2}{1 - \frac{1}{t}} = \frac{1+2t}{t-1} = \frac{1+2t}{t-1} \text{ dobismo i drugu jednačinu}$$

Sada pravimo sistem od dve jednačine:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{t+2}{1-t}$$

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 pa saberemo ove dve jednačine...

$$-4f(t) - 2f\left(\frac{1}{t}\right) = -2 \frac{t+2}{1-t}$$

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}$$

$$-3f(t) = \frac{-2t-4}{1-t} + \frac{1+2t}{t-1} = \frac{2t+4}{t-1} + \frac{1+2t}{t-1} = \frac{4t+5}{t-1} \text{ dakle}$$

$-3f(t) = \frac{4t+5}{t-1}$ podelimo sve sa -3 i dobijamo

$f(t) = \frac{4t+5}{-3(t-1)}$ odnosno $f(t) = \frac{4t+5}{3-3t}$ umesto t stavimo x i dobijamo:

$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$ konačno rešenje

INVERZNA FUNKCIJA

Definišimo najpre bijektivno preslikavanje:

Za preslikavanje $f: A \rightarrow B$ kažemo da je :

1) “jedan – jedan” (obostrano jednoznačno) , što skraćeno pišemo “1-1“, ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2) “na” ako je $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

3) **bijektivno ako je “1-1” i “na”**

Preslikavanje skupa A na sebe , u oznaci i_A , sa osobinom $(\forall x \in A)(i_A(x) = x)$ naziva se identičkim (jediničnim) preslikavanjem skupa A .

Ako je $f: A \rightarrow B$ bijektivno preslikavanje, onda sa f^{-1} ozačavamo preslikavanje skupa B na skup A , koje ima osobinu da je $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_A$. U tom slučaju f^{-1} nazivamo inverznim preslikavanjem preslikavanja f .

Postupak za rešavanje zadatka :

i) *Umesto $f(x)$ stavimo y*

ii) *Odavde izrazimo x preko y*

iii) *Izvršimo izmenu : umesto x pišemo $f^{-1}(x)$, a umesto y pišemo x .*

1. Data je funkcija $f(x) = 2x - 1$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.

Rešenje:

$f(x) = 2x - 1$ *Umesto $f(x)$ stavimo y*

$y = 2x - 1$ *Odavde izrazimo x preko y*

$2x = y + 1$

$x = \frac{y+1}{2}$ *Izvršimo izmenu : umesto x pišemo $f^{-1}(x)$, a umesto y pišemo x .*

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ i evo nam inverzne funkcije.

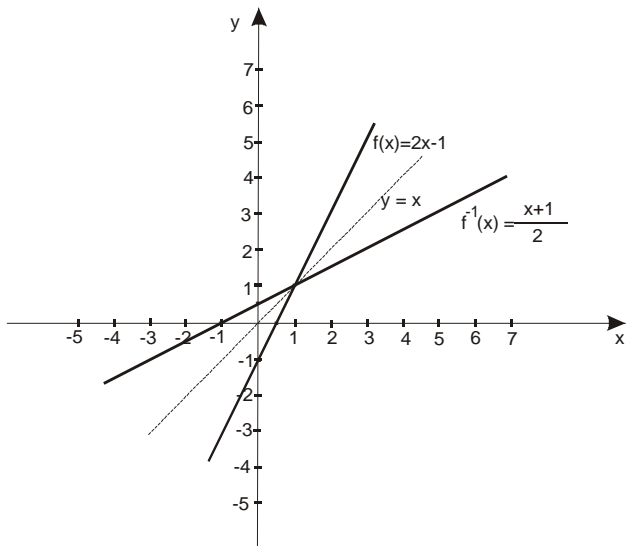
Pošto obe funkcije predstavljaju prave, uzećemo po dve proizvoljne tačke (prvo $x = 0$, pa $y = 0$) i nacrtati ih.

$f(x) = 2x - 1$

x	0	1/2
f(x)	-1	0

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

x	0	-1
$f^{-1}(x)$	1/2	0



Primitimo da su grafici simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

2. Data je funkcija $f(x) = 3x - 3$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.

Rešenje:

$$f(x) = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3$$

$$3x = y + 3$$

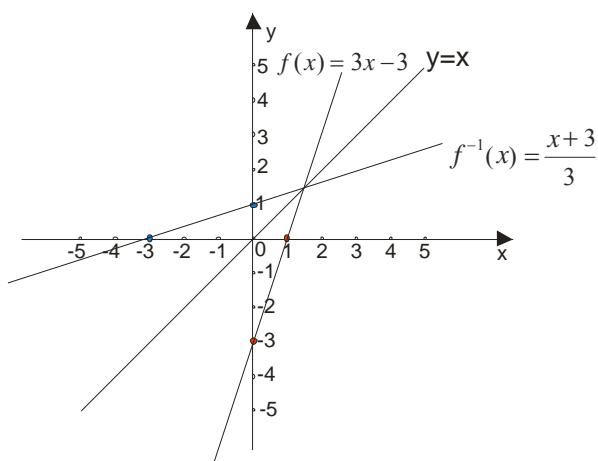
$$x = \frac{y+3}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{3}$$

za $f(x) = 3x - 3$

x	0	1
f(x)	-3	0

za $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{3}$

x	0	-3
f ⁻¹ (x)	1	0



Opet su grafici simetrični u odnosu na pravu $y = x$. Šta mislite, da li će uvek tako biti?

3. Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = \frac{x-3}{x+7}$

Rešenje:

$$f(x) = \frac{x-3}{x+7}$$

$$y = \frac{x-3}{x+7}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{x-3}{x+7} \quad \text{množimo unakrsno}$$

$$y(x+7) = 1(x+3)$$

$$yx + 7y = x + 3$$

$$yx - x = 3 - 7y$$

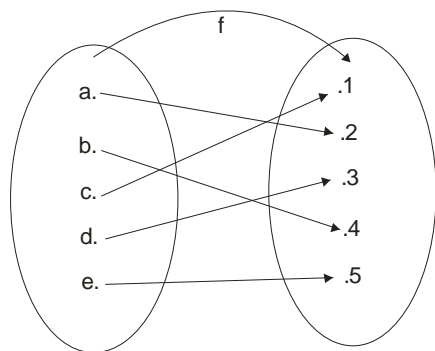
$$x(y-1) = 3 - 7y$$

$$x = \frac{3-7y}{y-1} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{3-7x}{x-1}}$$

4. Data je funkcija $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Odrediti njenu inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

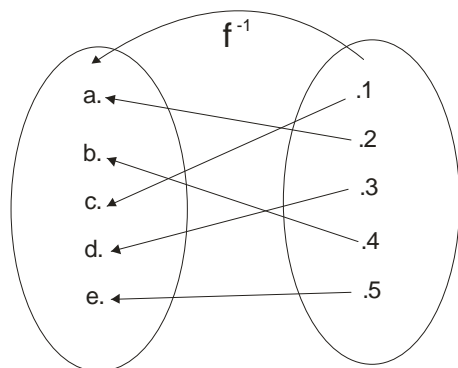
Rešenje:

Ovde nam je funkcija zadata na drugi način. Direktno znamo koji elemenat se u koji preslikava:



Šta će biti inverzna funkcija?

Pa jednostavno, elementi iz drugog skupa se slikaju u prvi...



Ili zapisano na drugi način: $f^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

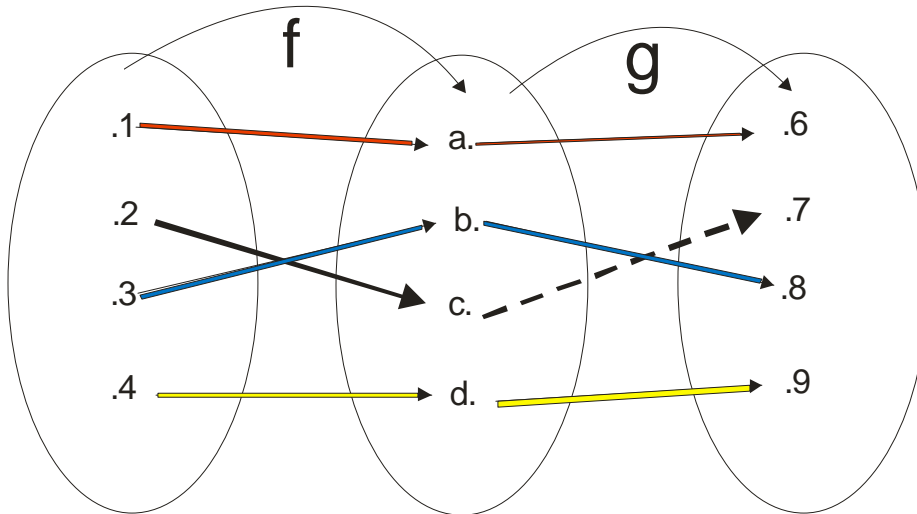
Neka su $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ funkcije. Tada sa $g \circ f$ označavamo kompoziciju (proizvod) preslikavanja f i g , i definišemo ga sa $(\forall x \in A) ((g \circ f)(x) = g(f(x)))$. Na ovaj način smo ustvari dobili preslikavanje $g \circ f : A \rightarrow C$ (kompozicija se najčešće obeležava sa \circ , a čita se “ **kružić**”

primer 1.

Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **odrediti** $(g \circ f)(x)$

Rešenje:

Ajmo najpre da ovo predstavimo dijagramom da vidimo šta se zapravo dešava a onda ćemo ispisati i rešenje:



Za svaki element radimo posebno:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(1)) = g(a) = 6$ Na slici uočite **crvene** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(2)) = g(c) = 7$ Na slici uočite **crne** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(3)) = g(b) = 8$ Na slici uočite **plave** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(4)) = g(d) = 9$ Na slici uočite **žute** strelice.

primer 2.

Ako je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$ odrediti:

a) $f \circ g = ?$

b) $g \circ h = ?$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Rešenje:

a) $f \circ g = ?$

Kako je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, idemo redom:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(p)) = f(1) = c$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(q)) = f(4) = d$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(r)) = f(3) = b$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(s)) = f(2) = a$$

Odavde imamo da je: $f \circ g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$

b) $g \circ h = ?$

$g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$, pa je :

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(a)) = g(r) = 3$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(b)) = g(p) = 1$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(c)) = g(q) = 4$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(d)) = g(s) = 2$$

Pa je: $g \circ h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$c) (g \circ h) \circ f = ?$$

Slično radimo, samo što sada imamo tri funkcije u kompoziciji:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x)))$ Prvo radimo f , pa h i na kraju g ...

Ovako smemo da radimo jer važi asocijativni zakon $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$. Dakle:

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(1))) = g(h(c)) = g(q) = 4$$

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(2))) = g(h(a)) = g(r) = 3$$

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(3))) = g(h(b)) = g(p) = 1$$

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(4))) = g(h(d)) = g(s) = 2$$

Ova kompozicija je $(g \circ h) \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

primer 3.

Date su funkcije $f(x) = 3x - 2$ i $g(x) = 5x + 7$. Odrediti:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$
- c) $f \circ f$
- d) $g \circ g$

Rešenje:

Ovo je drugi tip zadatka vezan za kompoziciju funkcija.

- a) $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$ Sad zamenimo funkciju koja je “unutra”, znači $g(x)$

$(f \circ g)(x) = f(\boxed{g(x)}) = f(5x + 7) =$ nadjemo kako izgleda funkcija f ($f(x) = 3\boxed{x} - 2$) i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 3\boxed{5x + 7} - 2$ i još da ovo malo prisredimo...

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 3(5x + 7) - 2 = 15x + 21 - 2 = 15x + 19$$

b) $g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$ opet prvo zamenimo funkciju unutar...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2)$, sad posmatramo funkciju g i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = 5(3x-2) + 7$ opet malo sredimo...

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = 5(3x-2) + 7 = 15x - 10 + 7 = 15x - 3$$

c) $f \circ f$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2) - 2 = 9x - 6 - 2 = 9x - 8$$

d) $g \circ g$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x+7) = 5(5x+7) + 7 = 25x + 35 + 7 = 25x + 42$$

primer 4. Date su funkcije $f(x+1) = 5x-3$ i $g(2x-3) = 3x+1$. Odrediti:

a) $f \circ g$

b) $g^{-1} \circ f^{-1}$

Rešenje:

Ovo je zadatak u kome vas profesor proverava sve tri stvari: funkcionalnu jednačinu, inverznu funkciju i kompoziciju funkcija.

Prvo da nadjemo $f(x)$ i $g(x)$.

$$f(x+1) = 5x-3$$

$$x+1 = t$$

$$x = t-1$$

$$f(t) = 5(t-1) - 3$$

$$f(t) = 5t - 5 - 3$$

$$f(t) = 5t - 8 \rightarrow \boxed{f(x) = 5x - 8}$$

$$g(2x-3) = 3x+1$$

$$2x-3 = t$$

$$2x = t+3$$

$$x = \frac{t+3}{2}$$

$$g(t) = 3 \frac{t+3}{2} + 1$$

$$g(t) = \frac{3t+9+2}{2}$$

$$g(t) = \frac{3t+11}{2} \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{3x+11}{2}}$$

Dalje tražimo inverzne funkcije:

$$f(x) = 5x - 8$$

$$y = 5x - 8$$

$$5x = y + 8$$

$$x = \frac{y+8}{5} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+8}{5}}$$

$$g(x) = \frac{3x+11}{2}$$

$$y = \frac{3x+11}{2}$$

$$3x+11 = 2y$$

$$3x = 2y - 11$$

$$x = \frac{2y-11}{3} \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = \frac{2x-11}{3}}$$

Sada možemo naći:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x+11}{2}\right) = 5 \cdot \frac{3x+11}{2} - 8 = \frac{15x+55-16}{2} = \boxed{\frac{15x+39}{2}}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{x+8}{5}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x+8}{5} - 11}{3} = \frac{2x+16-55}{3} = \frac{2x-39}{3} = \frac{2x-39}{\frac{3}{1}} = \boxed{\frac{2x-39}{15}}$$